1. $f$ est prolongeable par continuité en 0.
   $f'$ a une limite en 0 donc le prolongement est $\mathcal{C}^1$ ; par contre $f"$ n'a pas de limite en 0, donc le prolongement n'est pas $\mathcal{C}^2$.
   $f$ est AVP, $f(x) \geq 2(1-\cos x)/(2\pi n)^{2/3}$ et $\sum \dfrac{2\int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi}(1-\cos x)\ \mathrm{d}x}{(2\pi n)^{2/3}} = \dfrac{C}{n^{2/3}}$ est le TG d'une série divergente donc $f \notin L^1(\mathbb{R}_+)$.
   Par contre, tous les termes de $f^2, f'^2$ sont en $\dfrac{\sin\ \text{ou}\ \cos}{x^\alpha}$ avec $\alpha > 1$ donc $f$ et $f'$ sont de carrés intégrables.
   $f"^2(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{C}{x^{4/3}}$ donc $f" \notin L^1(\mathbb{R}_+)$ ; mais $f"^2$ est intégrable sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$.
2. $|ff"| \leq (f^2 + f"^2)/2$ donc $ff" \in L^1([a, +\infty[)$.
   Soit $A(x) = \displaystyle\int_a^x f'^2 = -\int_a^x ff" + f(x)f'(x) - f(a)f'(a)$ ; $f'^2$ est AVP donc ou bien $f'^2$ est intégrable sur $[a, +\infty[$, ou bien $A(x) \to_{x\to+\infty} +\infty$. Dans le second cas, il faut que $\lim ff' = +\infty$ (puisque $ff"$ est intégrable), ie que $\lim(f^2)' = +\infty$ ; alors $\forall t \geq \alpha,\ (f^2)' \geq M > 0$ d'où $\forall t \geq \alpha,\ f^2 \geq Mt + C$ ce qui est absurde ($f^2$ est $L^1$). Conclusion : $f'^2$ est intégrable sur $[a, +\infty[$.
   $f^2 - f'^2 + f"^2 - (f + f' + f")^2 = -((f + f')^2)'$ ; $L^2([a, +\infty[)$ est un espace vectoriel donc $f + f' + f"$ est de carré intégrable d'où existence des termes et égalité $\displaystyle\int_a^{+\infty} f^2 - f'^2 + f"^2 = \int_a^{+\infty} (f + f' + f")^2 + (f(a) + f'(a))^2 - L$ où $L = \lim\limits_{+\infty}(f + f')^2$. Si $L > 0$, $f + f'$ n'est pas de carré intégrable, ce qui est absurde, donc $L = 0$ et $\displaystyle\int_a^{+\infty} f^2 - f'^2 + f"^2 \geq 0$.
   Rem. : L'égalité est vraie ssi $f + f' + f" = 0$ et $f(a) + f'(a) = 0$ d'où une question possible sur les EDO linéaires.

O19-109

```
> restart:
> f:=(1-cos(x))/(x^(2/3));
```

$$f := \frac{1-\cos(x)}{x^{(2/3)}}$$

```
> series(f,x=0);
```

$$\frac{x^{(4/3)}}{2} - \frac{x^{(10/3)}}{24} + \mathrm{O}(x^{(16/3)})$$

```
> g:=diff(f,x);series(g,x=0);
```

$$g := \frac{\sin(x)}{x^{(2/3)}} - \frac{2}{3}\,\frac{1-\cos(x)}{x^{(5/3)}}$$

$$\frac{2\,x^{(1/3)}}{3} - \frac{5\,x^{(7/3)}}{36} + \mathrm{O}(x^{(13/3)})$$

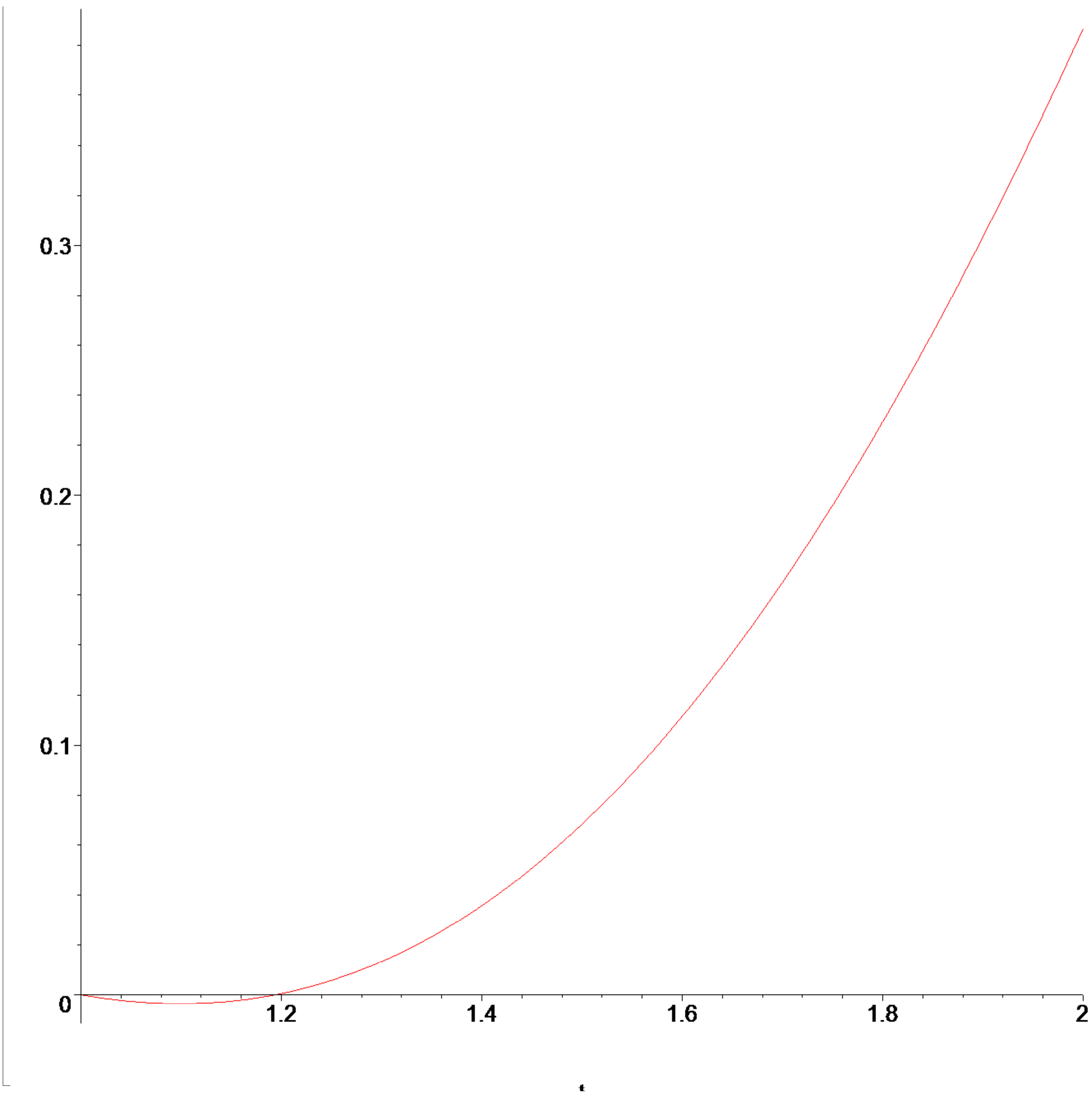
```
> h:=diff(g,x);series(h,x=0);
```

$$h := \frac{\cos(x)}{x^{(2/3)}} - \frac{4}{3}\,\frac{\sin(x)}{x^{(5/3)}} + \frac{10}{9}\,\frac{1-\cos(x)}{x^{(8/3)}}$$

$$\frac{2}{9\,x^{(2/3)}} - \frac{35\,x^{(4/3)}}{108} + \mathrm{O}(x^{(10/3)})$$

```
> i:=int(f^2-g^2+h^2,x=1..t):evalf(subs(t=1.1,i));plot(i,t=1..2);
```

-0.003581879969



0.3
0.2
0.1
0
1.2
1.4
1.6
1.8
2
t


>