

1. Tracer, à l'aide de Maple,  $f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^{2/3}}$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

Donner un développement de  $f$  en 0 et montrer que  $f$  est prolongeable en une fonction  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+$ . Ce prolongement est-il  $\mathcal{C}^2$  ?

Trouver une minoration de  $f$  sur les segments  $[2n\pi, 2(n+1)\pi]$  et dire si  $f$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+$ .  $f$  est-elle de carré intégrable ?  $f'$  est-elle de carré intégrable ?  $f''$  est-elle de carré intégrable ?

2. Soit  $f$  continue et de carré intégrable sur  $[a, +\infty[$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}$  et telle que  $f''$  soit de carré intégrable sur  $[a, +\infty[$ ;  $f'$  est-elle de carré intégrable sur  $[a, +\infty[$  (on pourra montrer que  $ff''$  est intégrable sur  $[a, +\infty[$ ) ?

Trouver une primitive de  $f^2 - f'^2 + f''^2 - (f + f' + f'')^2$  et en déduire que  $f^2 - f'^2 + f''^2$  est d'intégrale positive sur  $[a, +\infty[$ .