

1. Tracer, à l'aide de Maple, $f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^{2/3}}$ sur \mathbb{R}_+^* .

Donner un développement de f en 0 et montrer que f est prolongeable en une fonction \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+ . Ce prolongement est-il \mathcal{C}^2 ?

Trouver une minoration de f sur les segments $[2n\pi, 2(n+1)\pi]$ et dire si f est intégrable sur \mathbb{R}_+ . f est-elle de carré intégrable ? f' est-elle de carré intégrable ? f'' est-elle de carré intégrable ?

2. Soit f continue et de carré intégrable sur $[a, +\infty[$, à valeurs dans \mathbb{R} et telle que f'' soit de carré intégrable sur $[a, +\infty[$; f' est-elle de carré intégrable sur $[a, +\infty[$ (on pourra montrer que ff'' est intégrable sur $[a, +\infty[$) ?

Trouver une primitive de $f^2 - f'^2 + f''^2 - (f + f' + f'')^2$ et en déduire que $f^2 - f'^2 + f''^2$ est d'intégrale positive sur $[a, +\infty[$.