

$u_n(x) = \frac{\cos nx}{n^2}$ est le TG d'une série à termes $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ et NCV sur \mathbb{R} donc sa somme est définie et continue sur \mathbb{R} .

D'après le thm de Cauchy-Lipschitz (cas linéaire avec second membre, coefficients et second membre sont continus sur \mathbb{R}), E_k admet un espace affine de dimension 2 de solutions sur \mathbb{R} , et le pb de Cauchy $E_k, y(0) = y'(0) = 1$ admet une solution unique.

On peut décomposer P dans la base de Lagrange associée aux points $0, \pi/2, \pi$ et P est de degré 2.

Soit g la fonction paire et 2π -périodique qui coïncide avec P sur $[0, \pi]$. Elle est continue sur \mathbb{R} et elle a les mêmes coefficients de Fourier que f , donc $f = g$ (injectivité de $f \mapsto (c_n(f))$ par les fonctions continues).

On peut en déduire la valeur exacte de Φ .

[O19-096

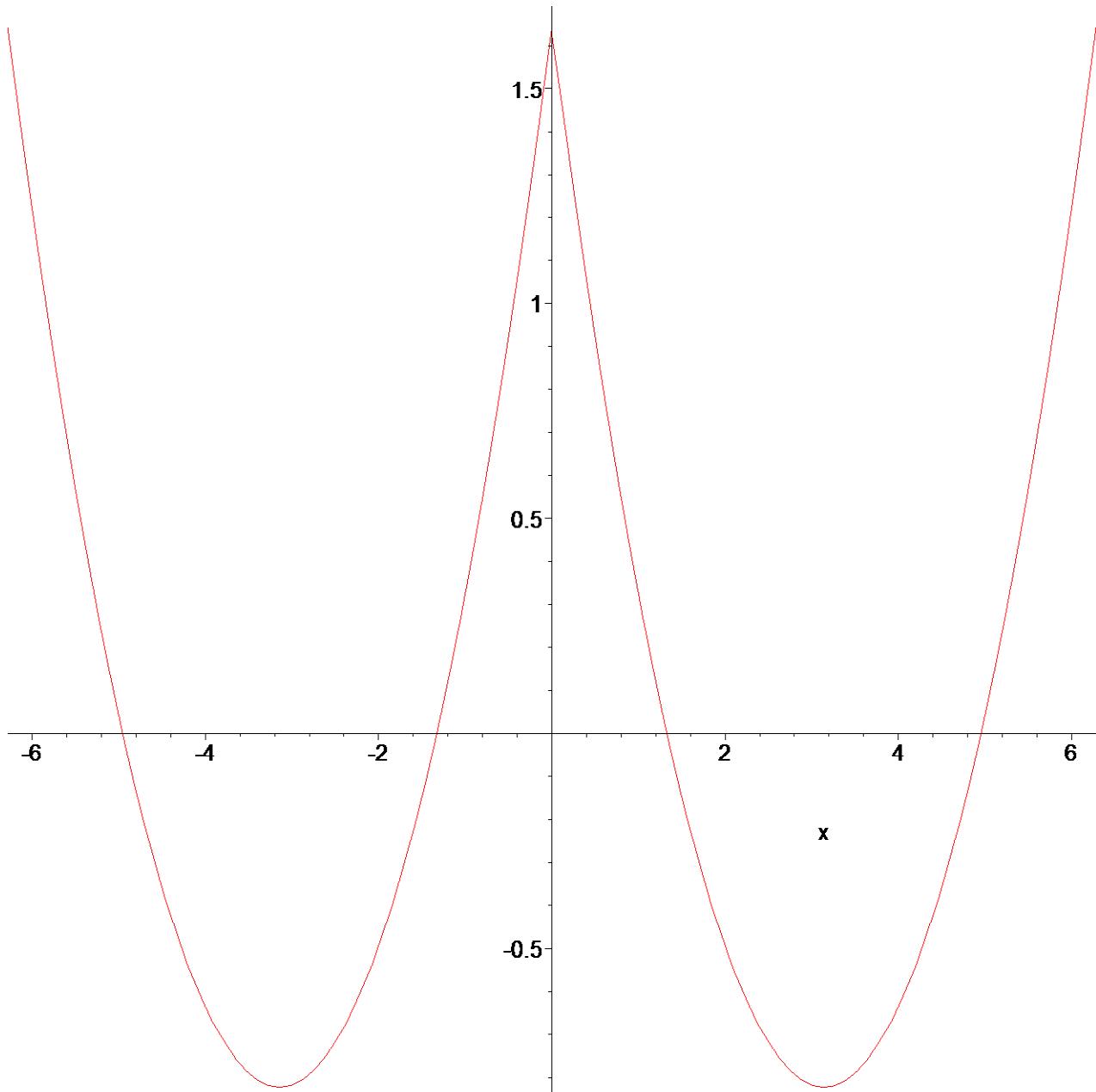
[> **restart:**

[> **s:=p->sum(cos(n*x)/n^2,n=1..p);f:=sum(cos(n*x)/n^2,n=1..infinity);**

$$s := p \rightarrow \sum_{n=1}^p \frac{\cos(n x)}{n^2}$$

$$f := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n x)}{n^2}$$

[> **plot(s(1000),x=-2*Pi..2*Pi);**



[> **edo:=p->diff(y(x),x\$2)+y(x)/4=s(p):ic:=y(0)=1,D(y)(0)=1;**
[**ic := y(0) = 1, D(y)(0) = 1**

[> **sol0:=dsolve({edo(3),ic},y(x));y0:=subs(sol0,y(x)):**
sol1:=dsolve({edo(10),ic},y(x));y1:=subs(sol1,y(x)):

```

sol2:=dsolve({edo(20),ic},y(x)):y2:=subs(sol2,y(x)):

sol0 := y(x) = 2 sin( $\frac{x}{2}$ ) +  $\frac{152}{63} \cos\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{136}{105} \cos(x) - \frac{2}{15} \cos(x)^2 + \frac{1}{15} - \frac{16}{315} \cos(x)^3$ 

solI := y(x) = 2 sin( $\frac{x}{2}$ ) +  $\frac{768391}{317520} \cos\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{30928}{415701} \cos(x)^6 - \frac{3275072}{72747675} \cos(x)^5$ 
      +  $\frac{18724}{2909907} \cos(x)^4 - \frac{1640354}{14549535} \cos(x)^2 - \frac{512}{9975} \cos(x)^{10} - \frac{1024}{26163} \cos(x)^9 + \frac{1096}{11305} \cos(x)^8$ 
      +  $\frac{567296}{9258795} \cos(x)^7 + \frac{73714423}{1163962800} - \frac{1028672}{43648605} \cos(x)^3 - \frac{300636}{230945} \cos(x)$ 

> plot([y0,y1,y2],x=-Pi..Pi,color=[green,blue,red]);

```

The plot shows three curves on a Cartesian coordinate system. The horizontal axis (x-axis) is labeled 'x' and ranges from -3 to 3. The vertical axis ranges from 0 to 4. The green curve, representing y_0 , starts at approximately (-3, 0.5), increases monotonically, and reaches a maximum value of about 3.8 at $x \approx 2.5$. The blue curve, representing y_1 , follows a very similar path but is slightly lower, peaking at about 3.7. The red curve, representing y_2 , is a straight line segment connecting the points $(-\pi/2, 0)$ and $(\pi/2, 0)$.

```

> u:=eval(subs(x=0,f));v:=eval(subs(x=Pi/2,f));v:=sum((-1)^n/n^2/4
,n=1..infinity);w:=eval(subs(x=Pi,f));w:=sum((-1)^n/n^2,n=1..inf
inity);a:=0:b:=Pi/2:c:=Pi:

```

$$u := \frac{\pi^2}{6}$$

$$v := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n^2}$$

$$v := -\frac{\pi^2}{48}$$

$$w := -\text{hypergeom}([1, 1, 1], [2, 2], -1)$$

$$w := -\frac{\pi^2}{12}$$

> **P:=u*(x-b)*(x-c)/(a-b)/(a-c)+v*(x-a)*(x-c)/(b-a)/(b-c)+w*(x-a)*(x-b)/(c-a)/(c-b);**

$$P := \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)(x - \pi)}{3} + \frac{x(x - \pi)}{12} - \frac{x\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{6}$$

> **a:=n->int(P*cos(n*x),x=0..Pi)*2/Pi;**

$$a := n \rightarrow \frac{2}{\pi} \int_0^\pi P \cos(n x) dx$$

> **assume(n,integer):aa:=n^2*simplify(a(n));**

$$aa := 1$$

> **edo1:=diff(y(x),x\$2)+y(x)/4=P;**

$$edo1 := \left(\frac{d^2}{dx^2} y(x) \right) + \frac{1}{4} y(x) = \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)(x - \pi)}{3} + \frac{x(x - \pi)}{12} - \frac{x\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{6}$$

> **sol:=dsolve({edo1,ic},y(x));yy:=subs(sol,y(x));**

$$sol := y(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right)(4\pi + 2) + \cos\left(\frac{x}{2}\right)\left(-\frac{2\pi^2}{3} + 9\right) - 8 + \frac{2\pi^2}{3} - 2x\pi + x^2$$

> **plot(yy,x=0..Pi);**

