$u_n(x) = \dfrac{\cos nx}{n^2}$ est le TG d'une série à termes $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ et NCV sur $\mathbb{R}$ donc sa somme est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
D'après le thm de Cauchy-Lipschitz (cas linéaire avec second membre, coefficients et second membre sont continus sur $\mathbb{R}$), E_k admet un espace affine de dimension 2 de solutions sur $\mathbb{R}$, et le pb de Cauchy $E_k, y(0 = y'(0) = 1$ admet une solution unique.
On peut décomposer P dans la base de Lagrange associée aux points $0, \pi/2, \pi$ et P est de degré 2.
Soit g la fonction paire et $2\pi-$périodique qui coïncide avec P sur $[0, \pi]$. Elle est continue sur $\mathbb{R}$ et elle a les mêmes coefficients de Fourier que f, donc $f = g$ (injectivité de $f \mapsto (c_n(f))$ por les fonctions continues.
On peut en déduire la valeur exacte de Φ.

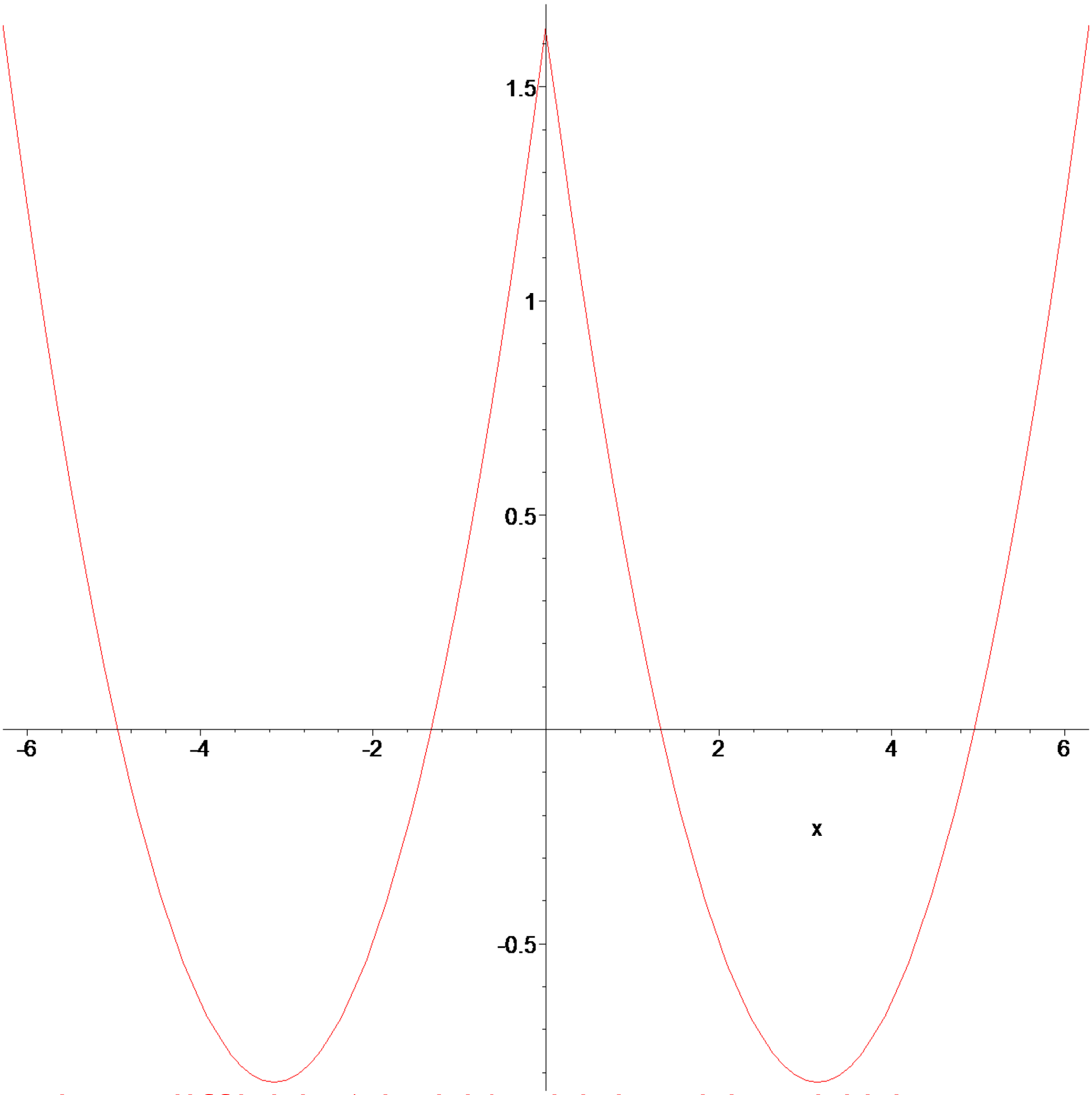
O19-096

```
> restart:
> s:=p->sum(cos(n*x)/n^2,n=1..p);f:=sum(cos(n*x)/n^2,n=1..infinity
  );
```

$$s := p \to \sum_{n=1}^{p} \frac{\cos(n\,x)}{n^2}$$

$$f := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\,x)}{n^2}$$

```
> plot(s(1000),x=-2*Pi..2*Pi);
```




```
> edo:=p->diff(y(x),x$2)+y(x)/4=s(p):ic:=y(0)=1,D(y)(0)=1;
```

$$ic := \mathrm{y}(0) = 1, \mathrm{D}(y)(0) = 1$$

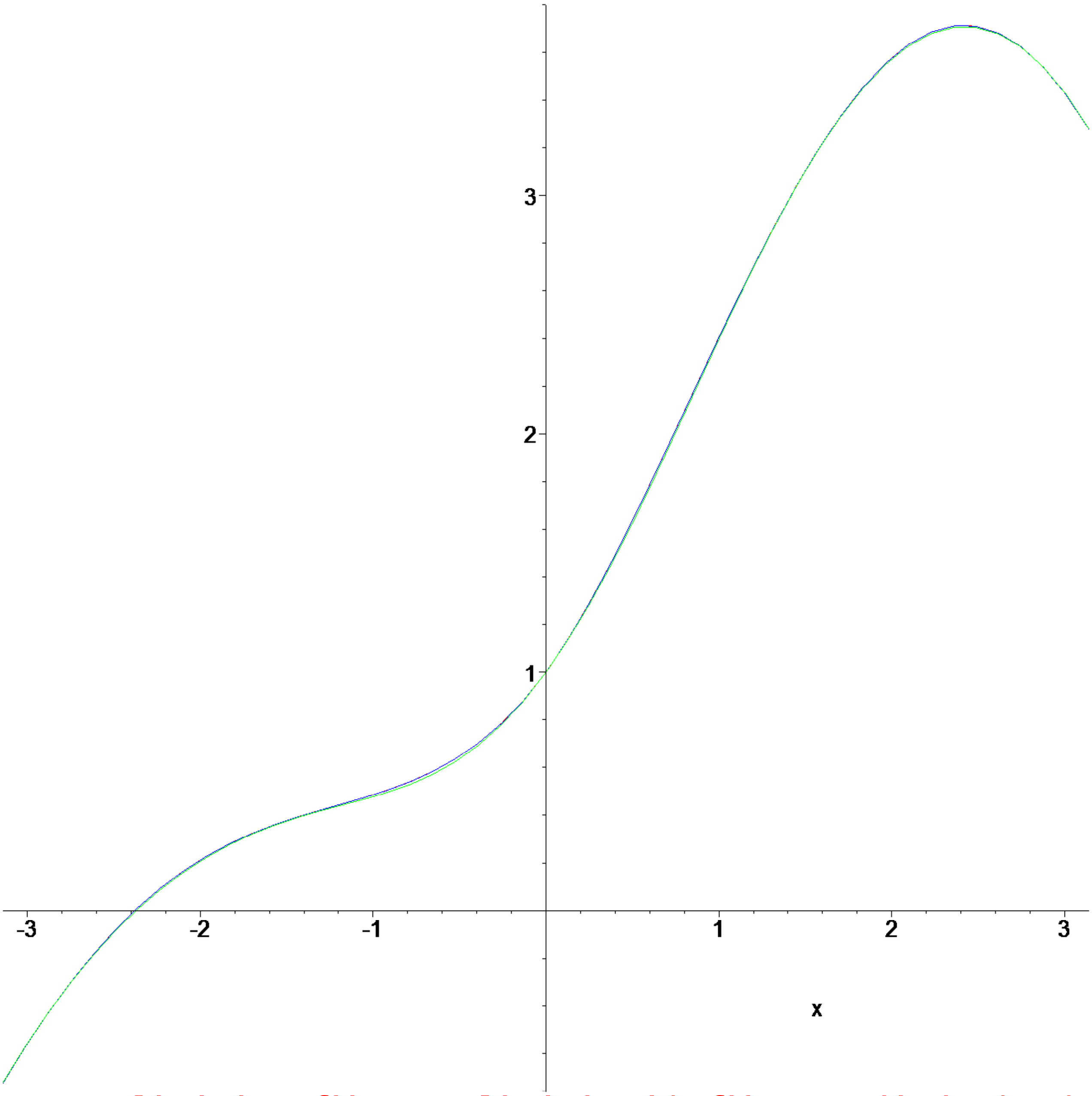
```
> sol0:=dsolve({edo(3),ic},y(x));y0:=subs(sol0,y(x)):
  sol1:=dsolve({edo(10),ic},y(x));y1:=subs(sol1,y(x)):
```

```
sol2:=dsolve({edo(20),ic},y(x)):y2:=subs(sol2,y(x)):
```

$$sol0 := y(x) = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{152}{63}\cos\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{136}{105}\cos(x) - \frac{2}{15}\cos(x)^2 + \frac{1}{15} - \frac{16}{315}\cos(x)^3$$

$$sol1 := y(x) = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{768391}{317520}\cos\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{30928}{415701}\cos(x)^6 - \frac{3275072}{72747675}\cos(x)^5 + \frac{18724}{2909907}\cos(x)^4 - \frac{1640354}{14549535}\cos(x)^2 - \frac{512}{9975}\cos(x)^{10} - \frac{1024}{26163}\cos(x)^9 + \frac{1096}{11305}\cos(x)^8 + \frac{567296}{9258795}\cos(x)^7 + \frac{73714423}{1163962800} - \frac{1028672}{43648605}\cos(x)^3 - \frac{300636}{230945}\cos(x)$$

```
> plot([y0,y1,y2],x=-Pi..Pi,color=[green,blue,red]);
```




```
> u:=eval(subs(x=0,f));v:=eval(subs(x=Pi/2,f));v:=sum((-1)^n/n^2/4,n=1..infinity);w:=eval(subs(x=Pi,f));w:=sum((-1)^n/n^2,n=1..infinity);a:=0:b:=Pi/2:c:=Pi:
```

$$u := \frac{\pi^2}{6}$$

$$v := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{n\,\pi}{2}\right)}{n^2}$$

$$v := -\frac{\pi^2}{48}$$

$$w := -\mathrm{hypergeom}([1, 1, 1], [2, 2], -1)$$

$$w := -\frac{\pi^2}{12}$$

```
> P:=u*(x-b)*(x-c)/(a-b)/(a-c)+v*(x-a)*(x-c)/(b-a)/(b-c)+w*(x-a)*(
  x-b)/(c-a)/(c-b);
```

$$P := \frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)(x-\pi)}{3} + \frac{x\,(x-\pi)}{12} - \frac{x\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{6}$$

```
> a:=n->int(P*cos(n*x),x=0..Pi)*2/Pi;
```

$$a := n \rightarrow \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} P\cos(n\,x)\,dx$$

```
> assume(n,integer):aa:=n^2*simplify(a(n));
```

$$aa := 1$$

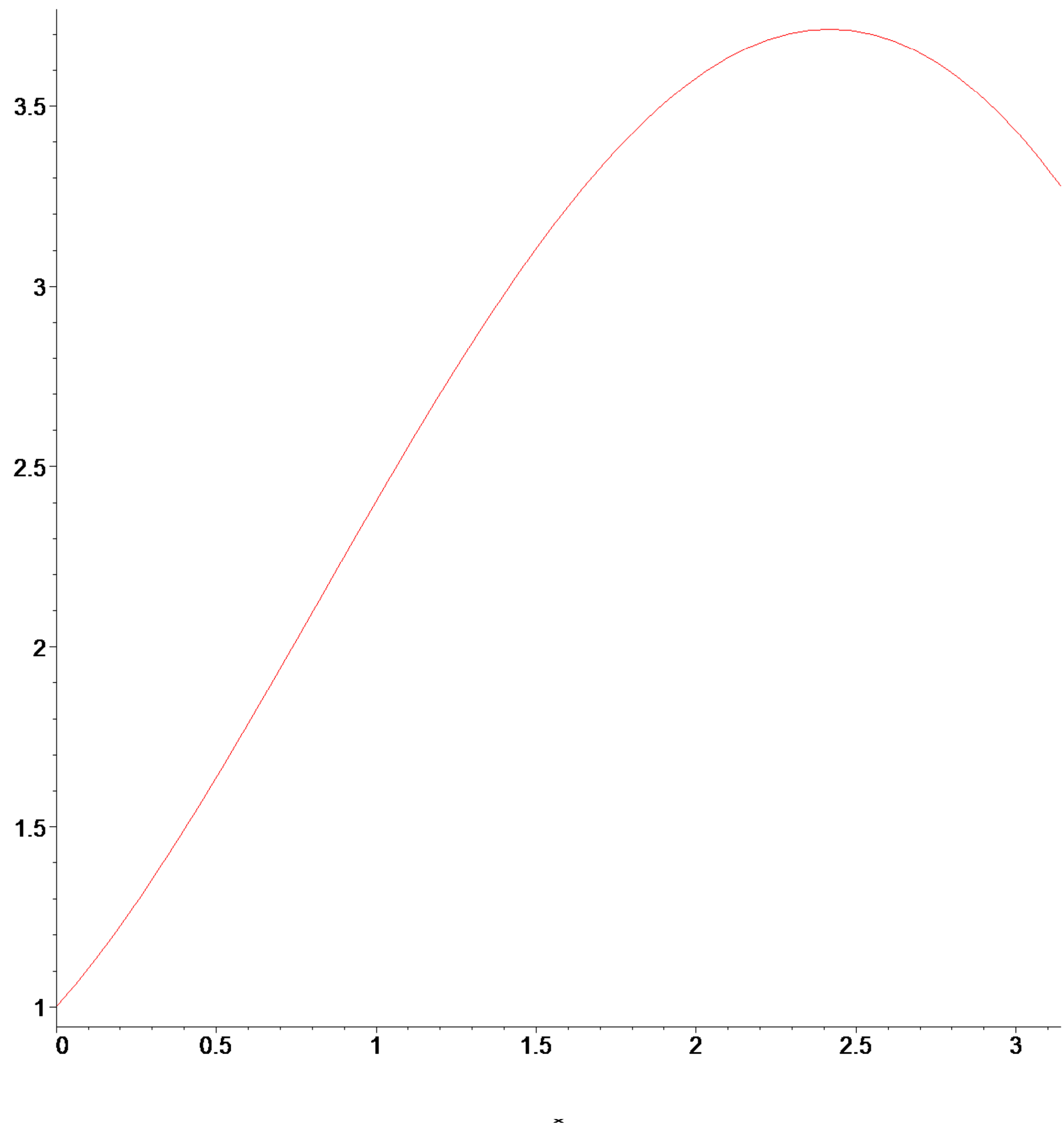
```
> edo1:=diff(y(x),x$2)+y(x)/4=P;
```

$$edo1 := \left(\frac{d^2}{dx^2}\,\mathrm{y}(x)\right) + \frac{1}{4}\,\mathrm{y}(x) = \frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)(x-\pi)}{3} + \frac{x\,(x-\pi)}{12} - \frac{x\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{6}$$

```
> sol:=dsolve({edo1,ic},y(x));yy:=subs(sol,y(x)):
```

$$sol := \mathrm{y}(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right)(4\,\pi+2) + \cos\left(\frac{x}{2}\right)\left(-\frac{2\,\pi^2}{3}+9\right) - 8 + \frac{2\,\pi^2}{3} - 2\,x\,\pi + x^2$$

```
> plot(yy,x=0..Pi);
```


3.5
3
2.5
2
1.5
1
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
x

>

>