Par formule de Stirling, $\binom{2n}{n} \sim \dfrac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$ donc $\dfrac{r^n}{\binom{2n}{n}} \sim \sqrt{\pi n}(r/4)^n$ est le TG d'une suite de limite nulle ssi $x \in]-4, 4[$ donc $R = 4$ et il y a DV grossière pour $x = \pm 4$.
$P(t) = 1 - xt(1-t)$ n'a pas de racine réelle si $x \in]0, 4[$.
Si $x \geq 4$, il a 2 racines réelles positives de produit $1/x$ donc une au mons est dans $[0, 1]$ et l'intégrale diverge.
Si $x \leq 0$, il a 2 racines réelles non nulles de signes opposés dont une dans $]1, +\infty[$ donc P ne s'annule pas sur $[0, 1]$ et l'intégrale existe.
Conclusion : l'intégrale existe pour $x < 4$.
Sur $]-4, 4[$, on peut dériver terme à terme la série entière $\sum \dfrac{x^n}{\binom{2n}{n}}$ donc en notant $f(x)$ sa somme, il s'agit de calculer $f(1)$ et $f'(1)$.
Par intégrations par partie successives, $\displaystyle\int_0^1 t^p(1-t)^q \, \mathrm{d}t = ...$
On sait que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = (1/(1-x))' = \frac{1}{(1-x)^2}$ sur $]-1, 1[$ donc, puisque $\forall t \in [0, 1],\ |xt(1-t)| \leq |x/4|$, on peut développer $\displaystyle\frac{x(1-t)}{(1-xt(1-t))^2} = x(1-t)\sum_{n\geq 1} nx^{n-1}t^{n-1}(1-t)^{n-1} = \sum_{n\geq 1} u_n(t)$
où $\|u_n\|_\infty^{[0,1]} = n|x|^n \sup\limits_{[0,1]}[(t-t^2)^{n-1}(1-t)] \leq n|x|^n(1/4)^{n-1} = 4n(|x|/4)^{n-1}$ ce qui est le TG d'une série convergente si $|x|/4 < 1$.
Par CV normale sur le segment $[0, 1]$, on peut donc intégrer terme à terme :
$\displaystyle\int_0^1 ... = \sum_{n\geq 1} nx^n \int_0^1 t^{n-1}(1-t)^n \, \mathrm{d}t = \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{\binom{2n}{n}}.$

O19-091

```
> restart:
> a:=x->int(x*(1-t)/(1-x*t*(1-t))^2,t=0..1);
```

$$a := x \to \int_0^1 \frac{x\,(1-t)}{(1-x\,t\,(1-t))^2}\,dt$$

```
> a(1);evalf(%);
```

$$\frac{1}{3}+\frac{2\sqrt{3}\,\pi}{27}$$

$$0.7363998588$$

```
> assume(x>-4,x<4):aa:=simplify(a(x));
```

$$aa := -x\sim \int_0^1 \frac{-1+t}{(1-x\sim t+x\sim t^2)^2}\,dt$$

```
> aaprim:=diff(aa,x);eval(subs(x=1,aaprim));evalf(%);
>
```

$$aaprim := -\int_0^1 \frac{-1+t}{(1-x\sim t+x\sim t^2)^2}\,dt - x\sim \int_0^1 -\frac{2\,(-1+t)\,(-t+t^2)}{(1-x\sim t+x\sim t^2)^3}\,dt$$

$$\frac{2\sqrt{3}\,\pi}{27}+\frac{2}{3}$$

$$1.069733192$$

```
> u:=n->(n!)^2/(2*n)!;
```

$$u := n \to \frac{(n!)^2}{(2\,n)!}$$

```
> ss1:=evalf(sum(u(n),n=1..infinity));
```

$$ss1 := 0.7363998585$$

```
> ss2:=evalf(sum(n*u(n),n=1..infinity));
```

$$ss2 := 1.069733192$$

```
>
```