Dire pour quelles valeurs de x $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{\binom{2n}{n}}$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{x(1-t)}{(1-xt(1-t))^2}\,\mathrm{d}t$ sont définies.
On admet l'égalité de ces deux expressions. Avec Maple, exprimer l'intégrale à l'aide des fonctions usuelles pour $x \in]-4,4[$.
En déduire les valeurs de $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\binom{2n}{n}}$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{n}{\binom{2n}{n}}$.
Montrer que $\displaystyle\int_0^1 t^p(1-t)^q\,\mathrm{d}t = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}$.
Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{x(1-t)}{(1-xt(1-t))^2}\,\mathrm{d}t = \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{\binom{2n}{n}}$. *Centrale* O19-091