Pour $n \in \mathbb{N}$, on note a_n le nombre de manière de couper un polygone à $n+2$ côtés en triangles. On pose $a_0 = a_1 = 1$ et on a clairement $a_2 = 2$.
Calculer a_3 et montrer que $a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$.
Calculer les 21 premiers termes de (a_n) avec Maple, ainsi qu'une valeur approchée de $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ pour $n \in [\![0, 20]\!]$.
Que peut-on conjecturer ?
On suppose que la série entière $\sum a_n x^n$ est de rayon de convergence $R > 0$ et on note f la somme de cette série sur $]-R, R[$.
Trouver une équation du second degré E vérifiée par f sur $]-R, R[\setminus\{0\}$.
Trouver une fonction g développable en série entière sur $]-r, r[$ avec $r > 0$ vérifiant E sur $]-r, r[\setminus\{0\}$.
Calculer le 20 premiers coefficients du développement en série entière de g et montrer que ces coefficients vérifient les mêmes conditions initiales et la même relation de récurrence que les a_n. Conclure.
Donner un équivalent de a_n et vérifier ce résultat avec Maple. *Centrale* O19-084