On étudie un problème de Cauchy linéaire à coefficient (q) continu sur $\mathbb{R}_+$ d'où l'existence-unicité d'une solution sur $\mathbb{R}_+$.
Supposons que y_1 ne soit pas à valeurs strictement positives. Alors $A = \{x \in \mathbb{R}_+ / y_1(x) \leq 0\}$ serait une partie non vide minorée de $\mathbb{R}$; soit m sa borne inférieure.
Tout $x < m$ est un minorant strict de A donc vérifie $y_1(x) > 0$ donc $\forall x \in [0, m[,\ y_1"(x) = -q(x)y_1(x) > 0$: y_1 est convexe sur $[0, m[$ et la tangente en $(0, 1)$ est $y = x + 1$ donc $\forall x \in [0, m[,\ y_1(x) \geq x + 1$ et aussi $y_1(m) \geq m + 1$ (1) par continuité de y_1 en m^-.
$\forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in A,\ m \leq x \leq m + \varepsilon$ (définition de la borne). En particulier, $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \exists x_n \in A,\ m \leq x_n \leq m + \dfrac{1}{n}$ donc $m = \lim x_n$ où (x_n) est une suite de points de A (ie m est adhérent à A).
$\forall n,\ y_1(x_n) \leq 0$ donc par continuité de y_1 en m^+, $y_1(m) \leq 0$ (2).
(1) et (2) sont incompatibles donc y_1 est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, donc aussi $y"_1$ $(= -qy_1)$; y_1' est donc croissante et $y_1'(0) > 0$ donc y_1 est strictement croissante.
$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ y_1(t) \geq x + 1$ donc $\forall x,\ \dfrac{1}{y_1^2(x)} \leq \dfrac{1}{(x+1)^2}$ donc $\dfrac{1}{y_1^2}$ est L^1 sur $\mathbb{R}_+$; notons I son intégrale.
y_2 est définie et $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$ et $y_2'(x) = y_1'(x) \displaystyle\int_x^{+\infty} 1/y_1^2 - 1/y_1(x)$ et $y"_2(x) = y"_1(x) \displaystyle\int_x^{+\infty} 1/y_1^2$ donc y_2 est solution de $y" + qy = 0$.
$W(y_1, y_2)(0) = -1 \neq 0$ donc (y_1, y_2) est une base de l'ensemble des solutions de $y" + qy = 0$.
Par convexité de y_1, $\forall t \in [x, +\infty[,\ y_1(t) \geq y_1(x) + (t - x)y_1'(x)$
donc $\forall x,\ y_2(x) \leq y_1(x) \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(y_1(x) + (t-x)y_1'(x))^2} = y_1(x) \left[\frac{-1}{y_1(x) + (t-x)y_1'(x)}\right]_x^{+\infty} = \frac{1}{y_1'(x)}$ et $1/y_1'$ décroit à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ donc est bornée et a une limite l.
D'autre par,t $y_1(x) \geq x + 1$ prouve que y_1 n'est pas bornée, donc la solution $C_1y_1 + C_2y_2$ est donc bornée ssi $C_1 = 0$.
y_2 est AVP et $y"_2 = -qy_2$ donc y_2 est convexe et y_2' est croissante.
$y_2'(x) = \dfrac{y_1'(x)}{y_1(x)} y_2(x) - \dfrac{1}{y_1(x)}$ et $y_2(x) \leq \dfrac{1}{y_1'(x)}$ donc y_2' est à valeurs négatives (donc majorée).
y_2' a donc une limite $\sup y_2' = \lambda \leq 0$ en $+\infty$. Supposons que $\lambda < 0$; alors $\forall x,\ y_2(x) \leq \lambda x + y_2(0)$ ce qui est incompatible avec le fait que y_2 soit à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, donc $\lambda = 0$ (et l'intégrabilité de q est inutile).

O19-081

```
> restart;
> q:=n->-(1+t)^n;qq:=-exp(t);qqq:=-exp(-t);
```

$$q := n \rightarrow -(1+t)^n$$

$$qq := -\mathbf{e}^t$$

$$qqq := -\mathbf{e}^{(-t)}$$

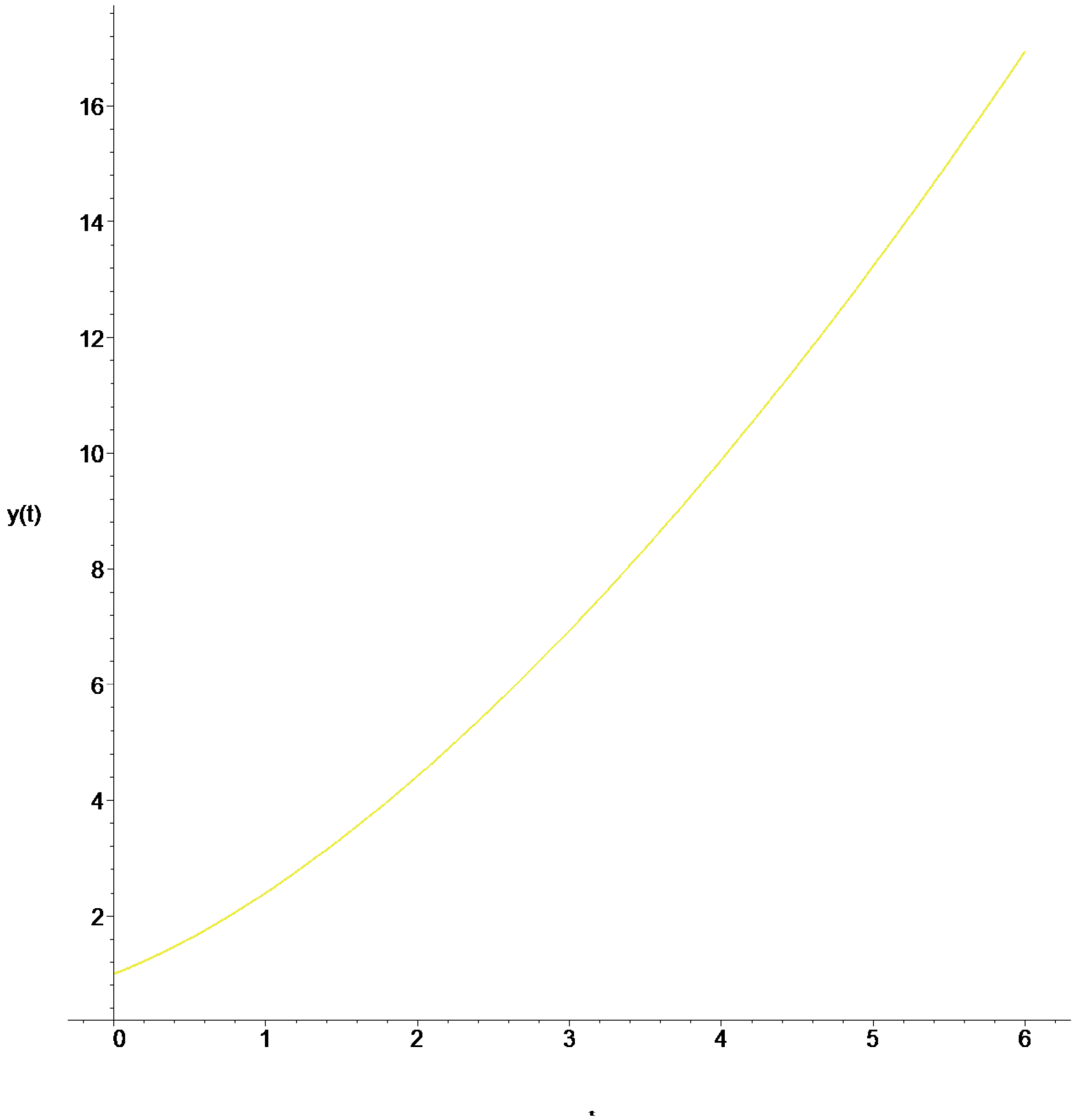
```
> edo:=unapply(diff(y(t),t$2)+q(n)*y(t),n);
```

$$edo := n \rightarrow \left(\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}\mathrm{y}(t)\right)\right) - (1+t)^n\,\mathrm{y}(t)$$

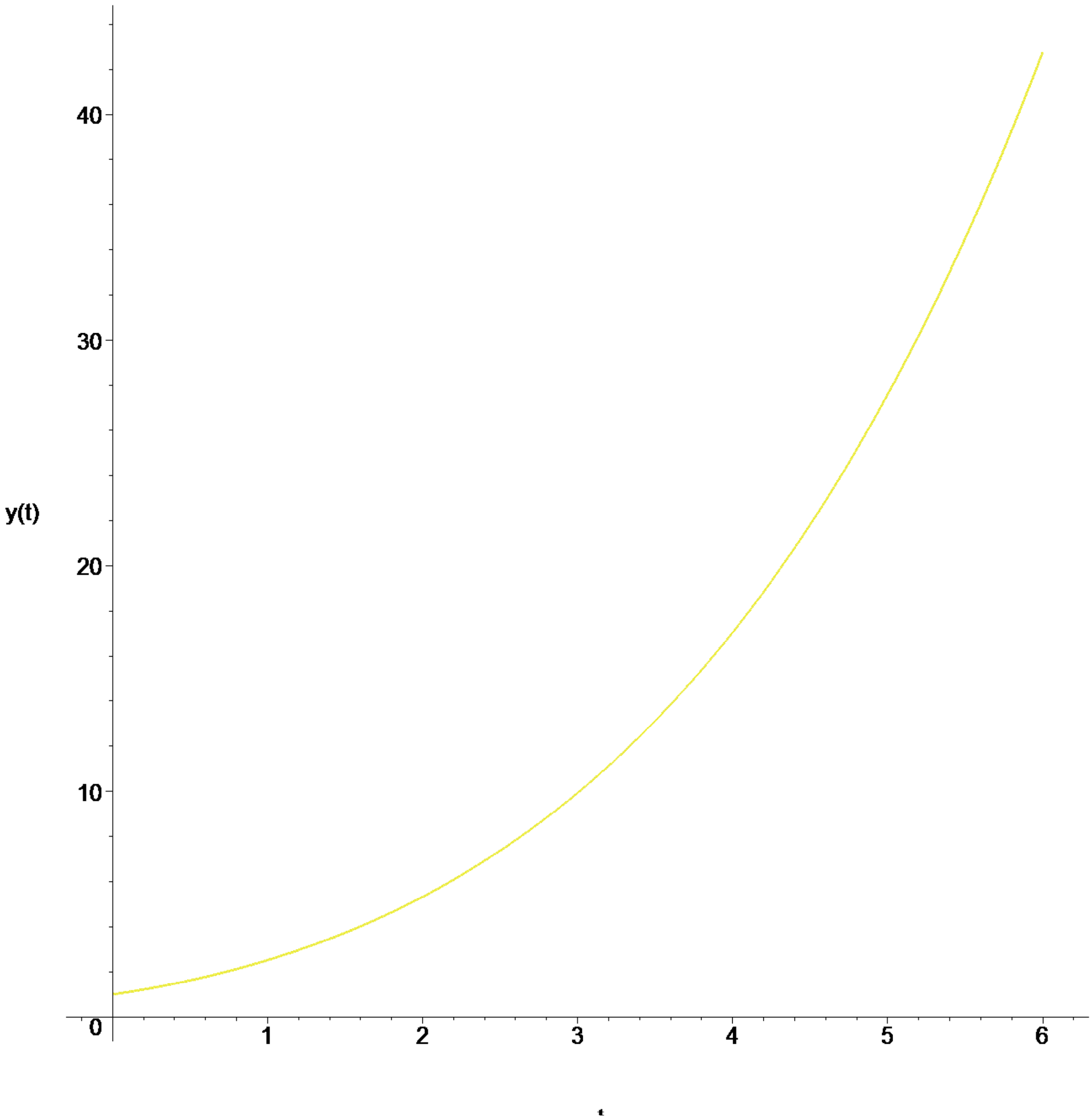
```
> with(DEtools);
```

[*DEnormal, DEplot, DEplot3d, DEplot_polygon, DFactor, DFactorLCLM, DFactorsols, Dchangevar, GCRD, LCLM, MeijerGsols, PDEchangecoords, RiemannPsols, Xchange, Xcommutator, Xgauge, abelsol, adjoint, autonomous, bernoullisol, buildsol, buildsym, canoni, caseplot, casesplit, checkrank, chinisol, clairautsol, constcoeffsols, convertAlg, convertsys, dalembertsol, dcoeffs, de2diffop, dfieldplot, diffop2de, dpolyform, dsubs, eigenring, endomorphism_charpoly, equinv, eta_k, eulersols, exactsol, expsols, exterior_power, firint, firtest, formal_sol, gen_exp, generate_ic, genhomosol, gensys, hamilton_eqs, hypergeomsols, hyperode, indicialeq, infgen, initialdata, integrate_sols, intfactor, invariants, kovacicsols, leftdivision, liesol, line_int, linearsol, matrixDE, matrix_riccati, maxdimsystems, moser_reduce, muchange, mult, mutest, newton_polygon, normalG2, odeadvisor, odepde, parametricsol, phaseportrait, poincare, polysols, power_equivalent, ratsols, redode, reduceOrder, reduce_order, regular_parts, regularsp, remove_RootOf, riccati_system, riccatisol, rifread, rifsimp, rightdivision, rtaylor, separablesol, solve_group, super_reduce, symgen, symmetric_power, symmetric_product, symtest, transinv, translate, untranslate, varparam, zoom*]

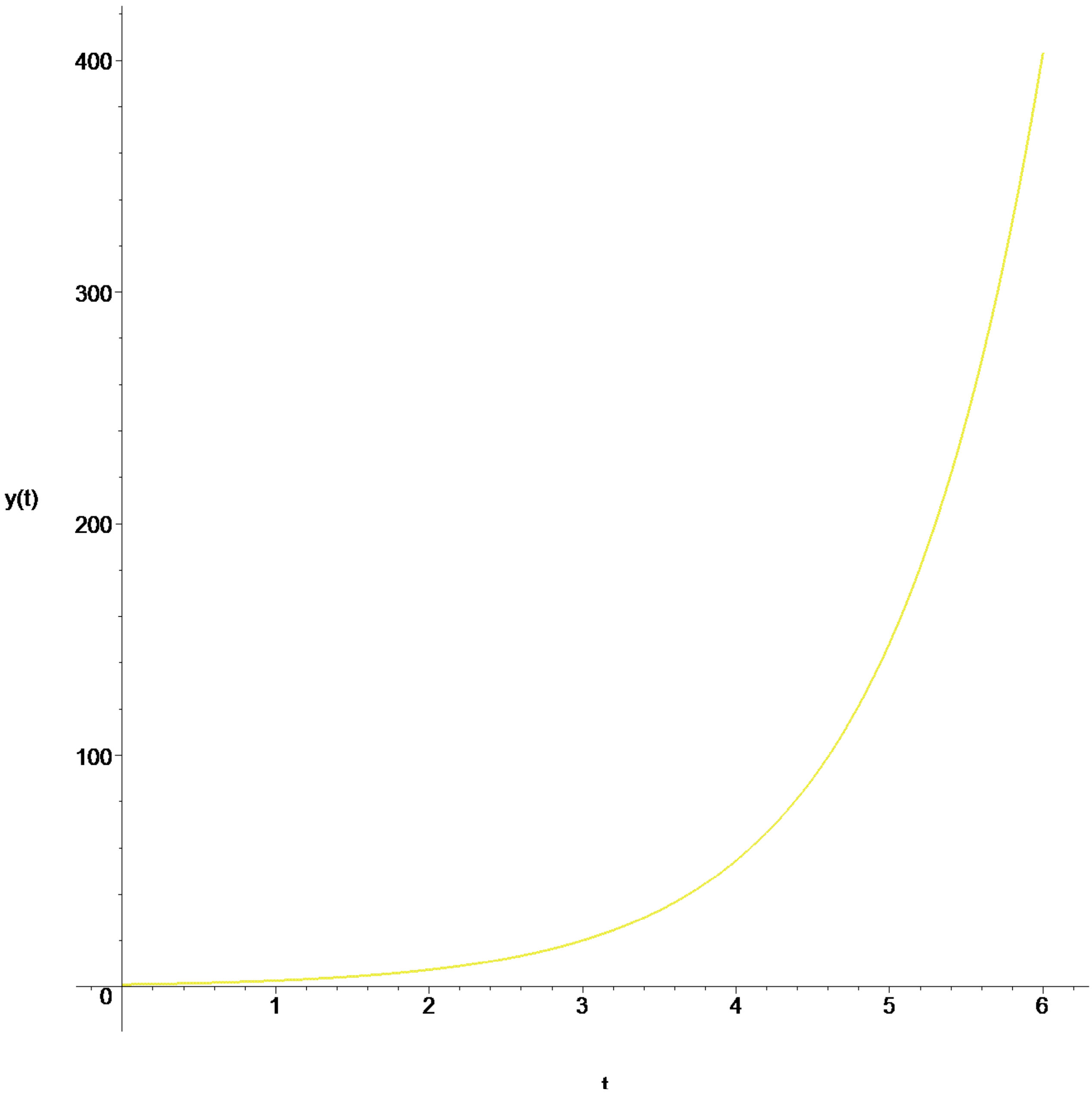
```
> for n from -2 to 2 do DEplot(edo(n),y(t),
  t=0..6,[[y(0)=1,D(y)(0)=1]],stepsize=.05) od;
```

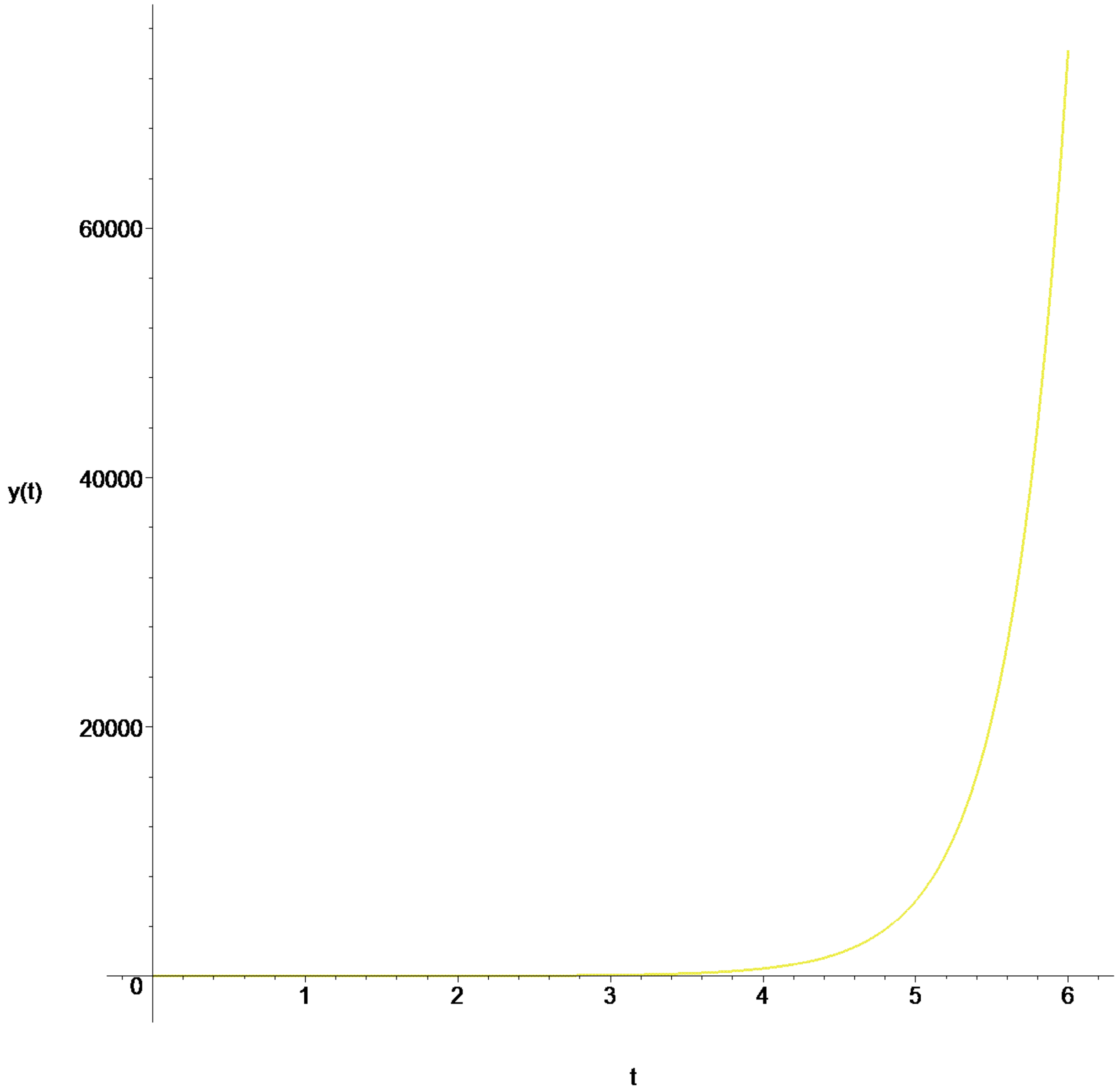


16
14
12
10
y(t)
8
6
4
2
0
1
2
3
4
5
6
t

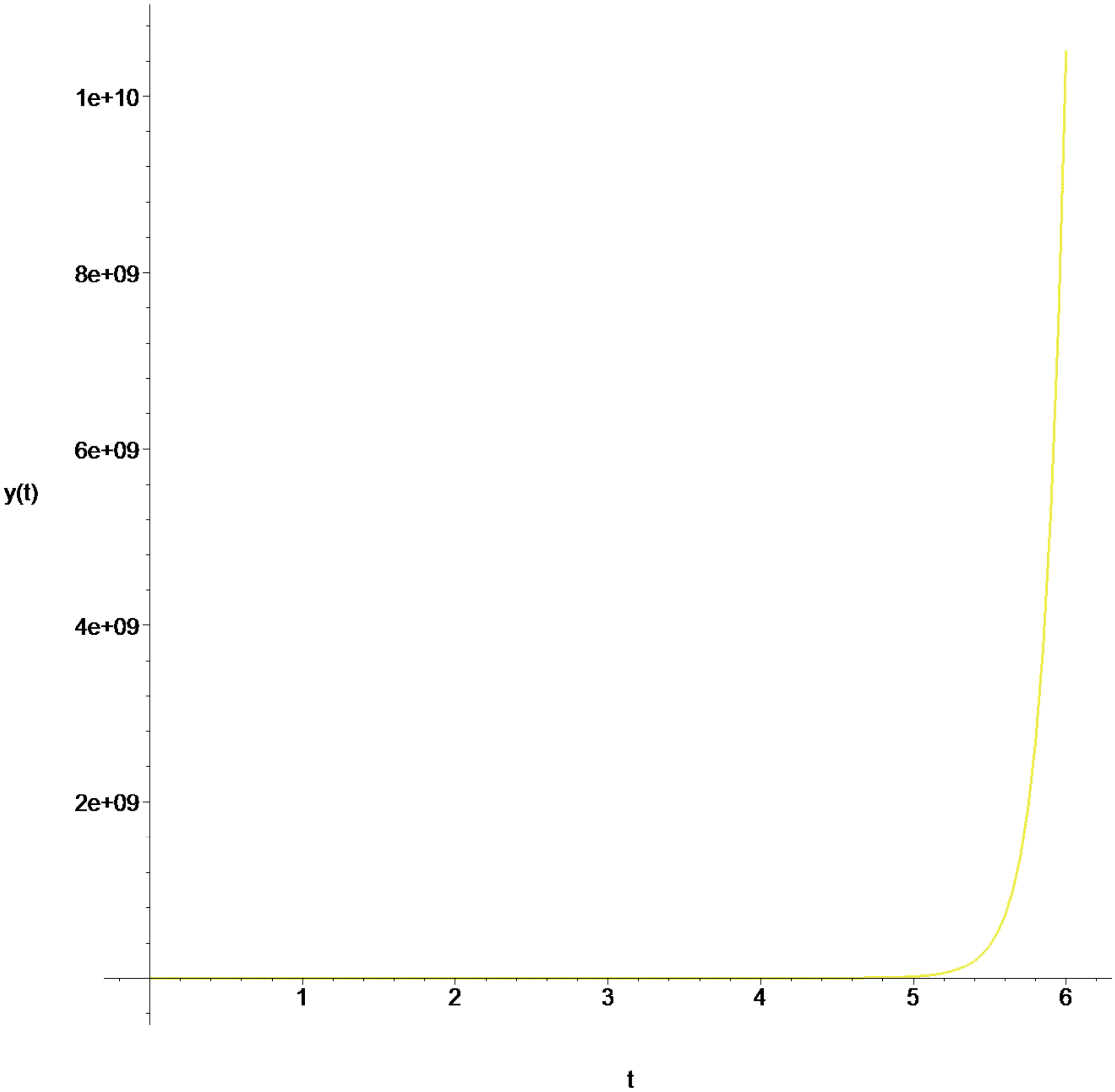


40
30
y(t)
20
10
0
1
2
3
4
5
6
t


400
300
200
100
0
y(t)
1
2
3
4
5
6
t



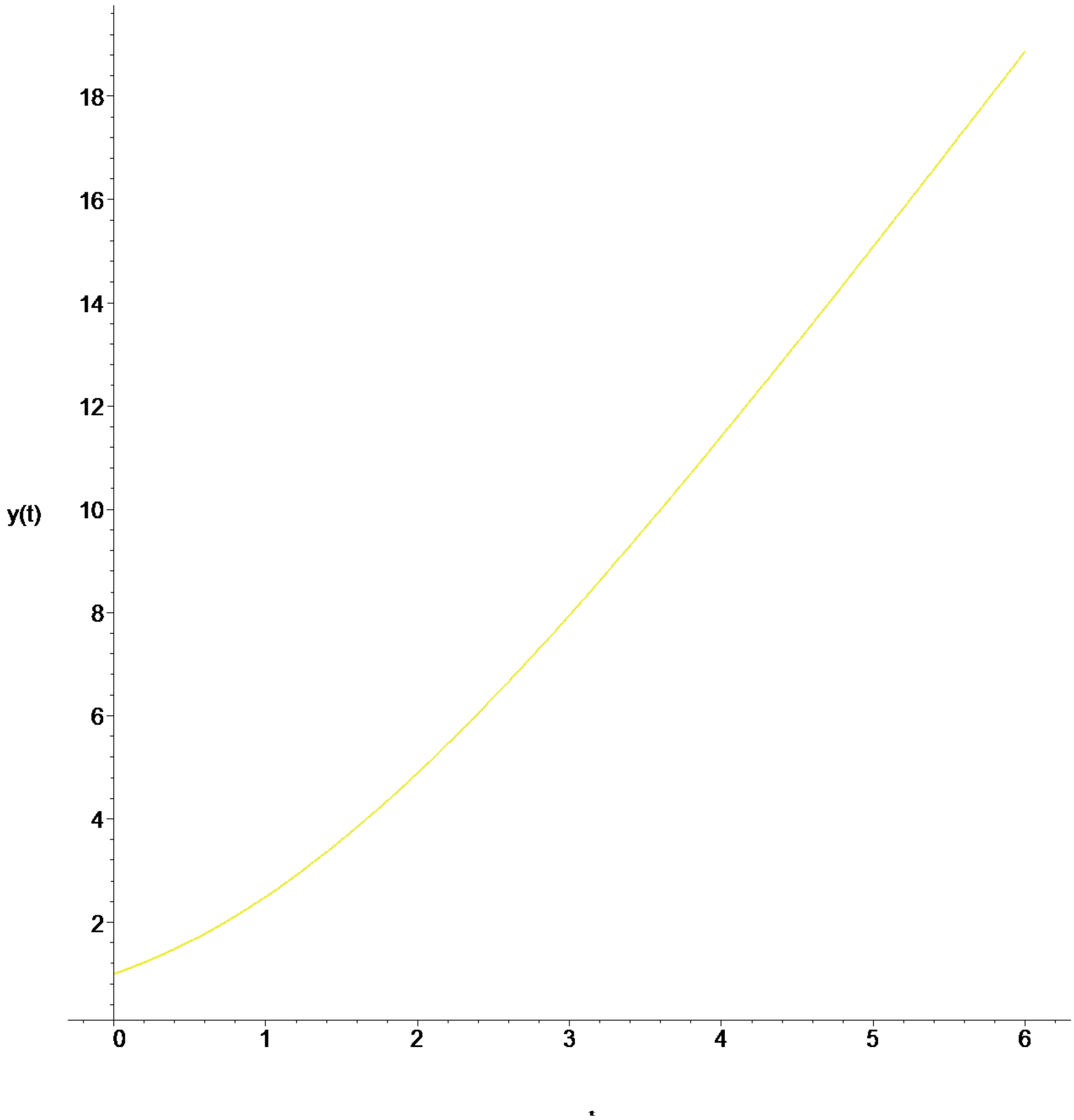
y(t)
60000
40000
20000
0
1
2
3
4
5
6
t




```
> edoqqq:=diff(y(t),t$2)+qqq*y(t);
```

$$edoqqq := \left(\frac{d^2}{dt^2}\,\mathrm{y}(t)\right) - \mathbf{e}^{(-t)}\,\mathrm{y}(t)$$

```
> DEplot(edoqqq,y(t),
  t=0..6,[[y(0)=1,D(y)(0)=1]],stepsize=.05);
```


y(t)
18
16
14
12
10
8
6
4
2
0
1
2
3
4
5
6
t

>