Il s'agit d'un problème de Cauchy de la forme $(y' = f(t, y), (t_0 = 0, y_0 = 0)$ avec $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ d'où l'existence-unicité d'une solution maximale $y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ où I est un intervalle ouvert.
Supposons qu'il existe $t_1 \in I$ tel que $y(t_1) > \pi/2$. D'après le thm des valeurs intermédiaires, (y est continue sur $[t_0, t_1]$ ou $[t_1, t_0]$) il existe $t_2 \in I$ tel que $y(t_2) = \pi/2$.
Le problème de Cauchy $(y' = f(t, y), (y(t_2) = \pi/2)$ a une solution évidente (et constante), $z = \pi/2$ définie sur $J = \mathbb{R}$ qui est donc la solution maximale et a aussi pour solution la fonction y étudiée ; z et y sont donc égales ce qui est absurde $(y(0) \neq \pi/2)$.
De même, $\exists t_1,\ y(t_1) < -\pi/2$ est impossible, donc $\forall t \in I,\ y(t) \in]-\pi/2, \pi/2[$.
On en déduit que $\forall t,\ y'(t) \geq 0$ donc y est croissante sur I.
Soit $u(t) = -y(-t)$. $u(0) = 0$ et $u'(t) = y'(-t) = \dfrac{\cos(y(-t)}{1 + y^2(-t)} = \dfrac{\cos(u(t)}{1 + u^2(t)}$: u et y vérifient le même pb de Cauchy, donc $y = u$ (et en particulier I est symétrique par rapport à 0 $(I =]-\alpha, \alpha[)$: y est impaire.
Le calcul de y" prouve que y est concave sur $[0, \alpha[$ et convexe sur $]-\alpha, 0]$.
Supposons $\alpha \neq +\infty$. Alors y (croissante majorée par $\pi/2$) a une limite l en α^- et y' a une limite $(m = \dfrac{\cos l}{1 + l^2})$; y aurait un prolongement sur $]-\alpha, \alpha]$ qui serait $\mathcal{C}^1$ et solution du pb de Cauchy, ce qui est absurde (y est maximale), donc $\alpha = +\infty$ et $I = \mathbb{R}$.
On a vu que y a une limite $l(\leq \pi/2)$ en $\alpha = +\infty$. Supposons $0 \leq l < \pi/2$. Alors $m > 0$ donc sur un $]\beta, +\infty[,\ y'(t) > m/2$. On en déduit $\forall t \geq \beta,\ y(t) = y(\beta) + \displaystyle\int_\beta^t y' \geq y(\beta) + \frac{m}{2}(t - \beta)$ ce qui est absurde (y doit avoir une limite en $+\infty$). Conclusion : $l = \pi/2$.
$y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et $y' = f(t, y)$ avec $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ donc par récurrence, $y \in \mathcal{C}^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$; en particulier, y admet un DL_9 (ou DL_{10}) en 0. Il est de la forme $dl = a_0 t + a_1 t^3 + a_2 t^5 + a_3 t^7 + a_4 t^9 + o(t^{9 \text{ ou } 10}$. Soit P sa partie régulière.
P' est la partie régulière du $DL_{8 \text{ ou } 9}$ de y' et les parties régulières des DL_9 de $1 + y^2$ et $\cos y$ s'obtiennent en tronquant au degré 9 les DL_9 de $1 + P^2$ et $\cos P$ donc le DL_9 de $P'(1 + P^2) - \cos P$ est le même que celui ('zero') de $y'(1 + y^2) - \cos y$. 'zero' est donc un DL_9 pair dont les 5 coefficients doivent être nuls, ce qui donne $a_0, ..., a_4$.

O19-079

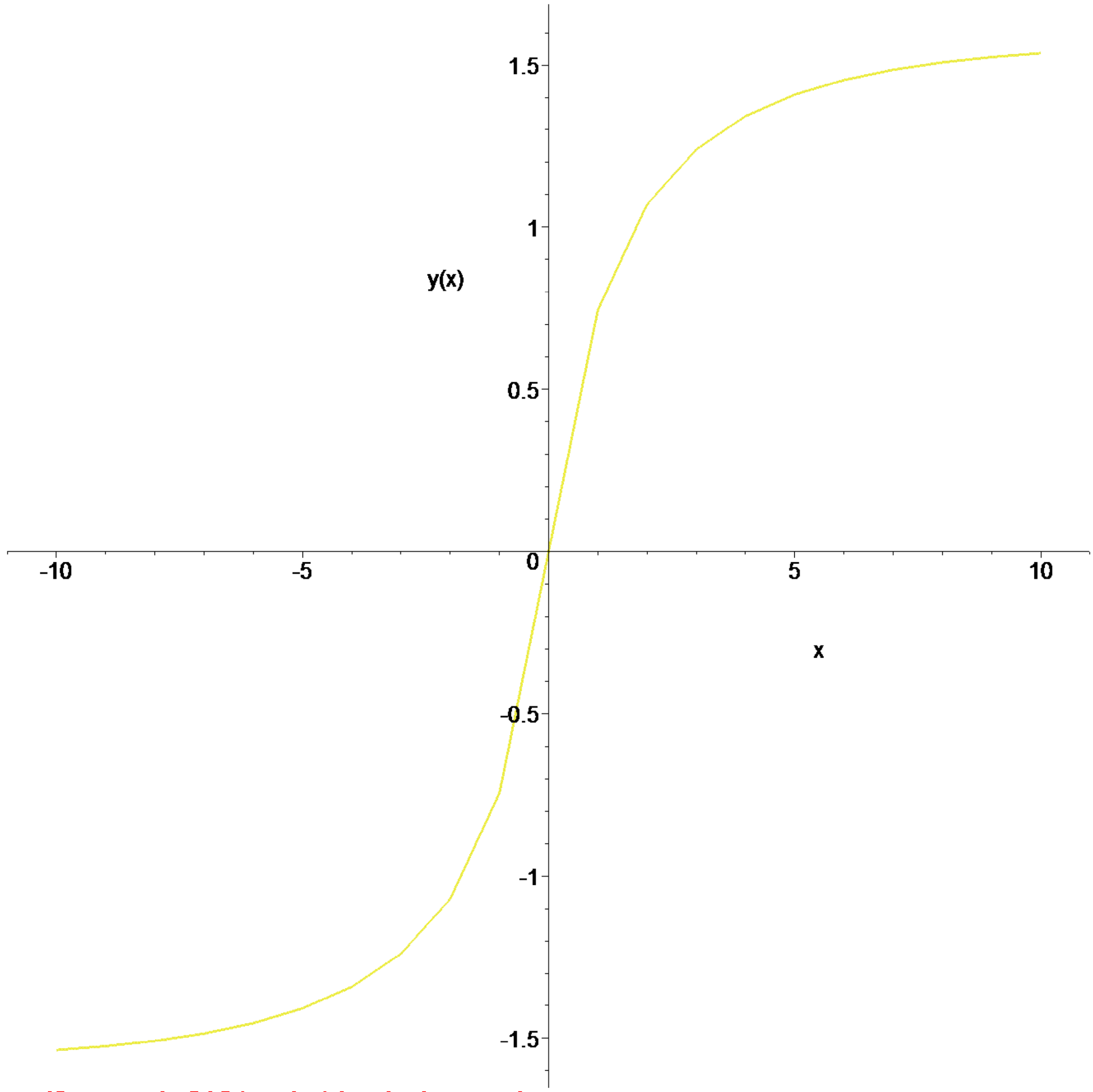
```
> restart;
> edo:=diff(y(x),x)=cos(y(x))/(1+(y(x))^2);
```

$$edo := \frac{d}{dx}\, y(x) = \frac{\cos(y(x))}{1 + y(x)^2}$$

```
> with(DEtools);
```

[*DEnormal, DEplot, DEplot3d, DEplot_polygon, DFactor, DFactorLCLM, DFactorsols, Dchangevar, GCRD, LCLM, MeijerGsols, PDEchangecoords, RiemannPsols, Xchange, Xcommutator, Xgauge, abelsol, adjoint, autonomous, bernoullisol, buildsol, buildsym, canoni, caseplot, casesplit, checkrank, chinisol, clairautsol, constcoeffsols, convertAlg, convertsys, dalembertsol, dcoeffs, de2diffop, dfieldplot, diffop2de, dpolyform, dsubs, eigenring, endomorphism_charpoly, equinv, eta_k, eulersols, exactsol, expsols, exterior_power, firint, firtest, formal_sol, gen_exp, generate_ic, genhomosol, gensys, hamilton_eqs, hypergeomsols, hyperode, indicialeq, infgen, initialdata, integrate_sols, intfactor, invariants, kovacicsols, leftdivision, liesol, line_int, linearsol, matrixDE, matrix_riccati, maxdimsystems, moser_reduce, muchange, mult, mutest, newton_polygon, normalG2, odeadvisor, odepde, parametricsol, phaseportrait, poincare, polysols, power_equivalent, ratsols, redode, reduceOrder, reduce_order, regular_parts, regularsp, remove_RootOf, riccati_system, riccatisol, rifread, rifsimp, rightdivision, rtaylor, separablesol, solve_group, super_reduce, symgen, symmetric_power, symmetric_product, symtest, transinv, translate, untranslate, varparam, zoom*]

```
> courbe:=DEplot(edo,y(x),
  x=-10..10,[[y(0)=0]],arrows=none):courbe;
```




```
> dl:=sum(a[i]*x^(2*i+1),i=0..4);
```

$$dl := a_0\,x + a_1\,x^3 + a_2\,x^5 + a_3\,x^7 + a_4\,x^9$$

```
> zero:=series(diff(dl,x)*(1+dl^2)-cos(dl),x,10);
```

$$zero := (a_0 - 1) + \left(a_0^{\ 3} + 3\,a_1 + \frac{1}{2}\,a_0^{\ 2}\right)x^2 + \left(-\frac{1}{24}\,a_0^{\ 4} + a_0\,a_1 + 5\,a_1\,a_0^{\ 2} + 5\,a_2\right)x^4 + \left(\frac{1}{720}\,a_0^{\ 6} + \frac{1}{2}\,a_1^{\ 2} - \frac{1}{6}\,a_1\,a_0^{\ 3} + a_0\,a_2 + 6\,a_1^{\ 2}\,a_0 + 5\,a_2\,a_0^{\ 2} + a_0\,(2\,a_0\,a_2 + a_1^{\ 2}) + 7\,a_3\right)x^6 + \left(9\,a_4 + 3\,a_1\,(2\,a_0\,a_2 + a_1^{\ 2}) + a_0\,(2\,a_0\,a_3 + 2\,a_1\,a_2) + 10\,a_2\,a_0\,a_1 + 7\,a_3\,a_0^{\ 2} - \frac{1}{40320}\,a_0^{\ 8} - \frac{1}{4}\,a_1^{\ 2}\,a_0^{\ 2} + a_1\,a_2 + \frac{1}{120}\,a_1\,a_0^{\ 5} + a_0\,a_3 - \frac{1}{6}\,a_2\,a_0^{\ 3}\right)x^8 + \mathrm{O}(x^{10})$$

```
> sys:={coeffs(convert(zero,polynom),x)};
```

$$sys := \{-\frac{1}{24} a_0^{\,4} + a_0\, a_1 + 5\, a_1\, a_0^{\,2} + 5\, a_2,$$

$$\frac{1}{720} a_0^{\,6} + \frac{1}{2} a_1^{\,2} - \frac{1}{6} a_1\, a_0^{\,3} + a_0\, a_2 + 6\, a_1^{\,2}\, a_0 + 5\, a_2\, a_0^{\,2} + a_0\, (2\, a_0\, a_2 + a_1^{\,2}) + 7\, a_3,\ 9\, a_4$$

$$+ 3\, a_1\, (2\, a_0\, a_2 + a_1^{\,2}) + a_0\, (2\, a_0\, a_3 + 2\, a_1\, a_2) + 10\, a_2\, a_0\, a_1 + 7\, a_3\, a_0^{\,2} - \frac{1}{40320} a_0^{\,8} - \frac{1}{4} a_1^{\,2}\, a_0^{\,2}$$

$$+ a_1\, a_2 + \frac{1}{120} a_1\, a_0^{\,5} + a_0\, a_3 - \frac{1}{6} a_2\, a_0^{\,3},\ a_0 - 1,\ a_0^{\,3} + 3\, a_1 + \frac{1}{2} a_0^{\,2}\}$$

```
> sol:=solve(sys);
```

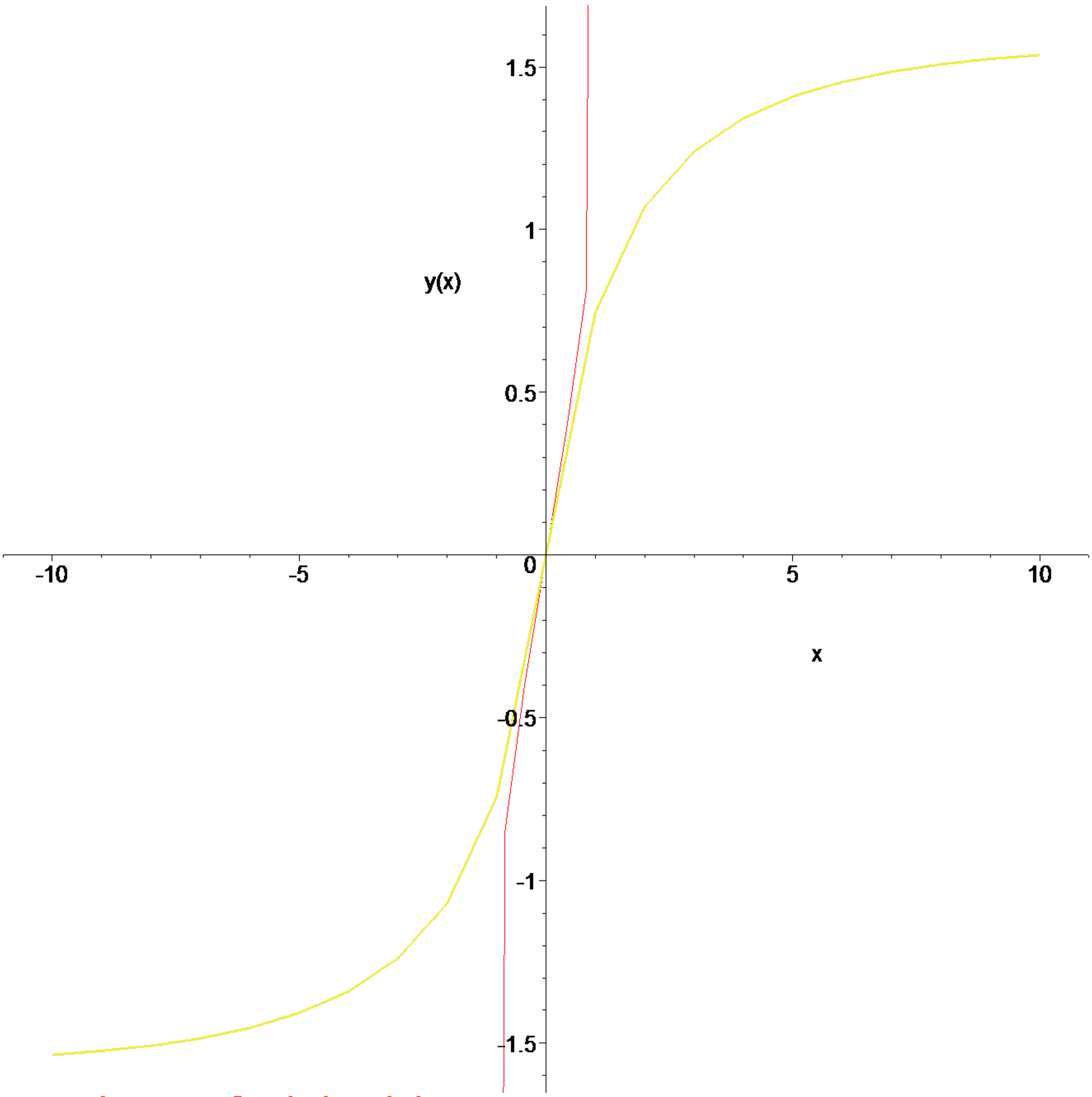
$$sol := \{a_0 = 1,\ a_1 = \frac{-1}{2},\ a_4 = \frac{648113}{362880},\ a_3 = \frac{-983}{1008},\ a_2 = \frac{73}{120}\}$$

```
> P:=subs(sol,dl);
```

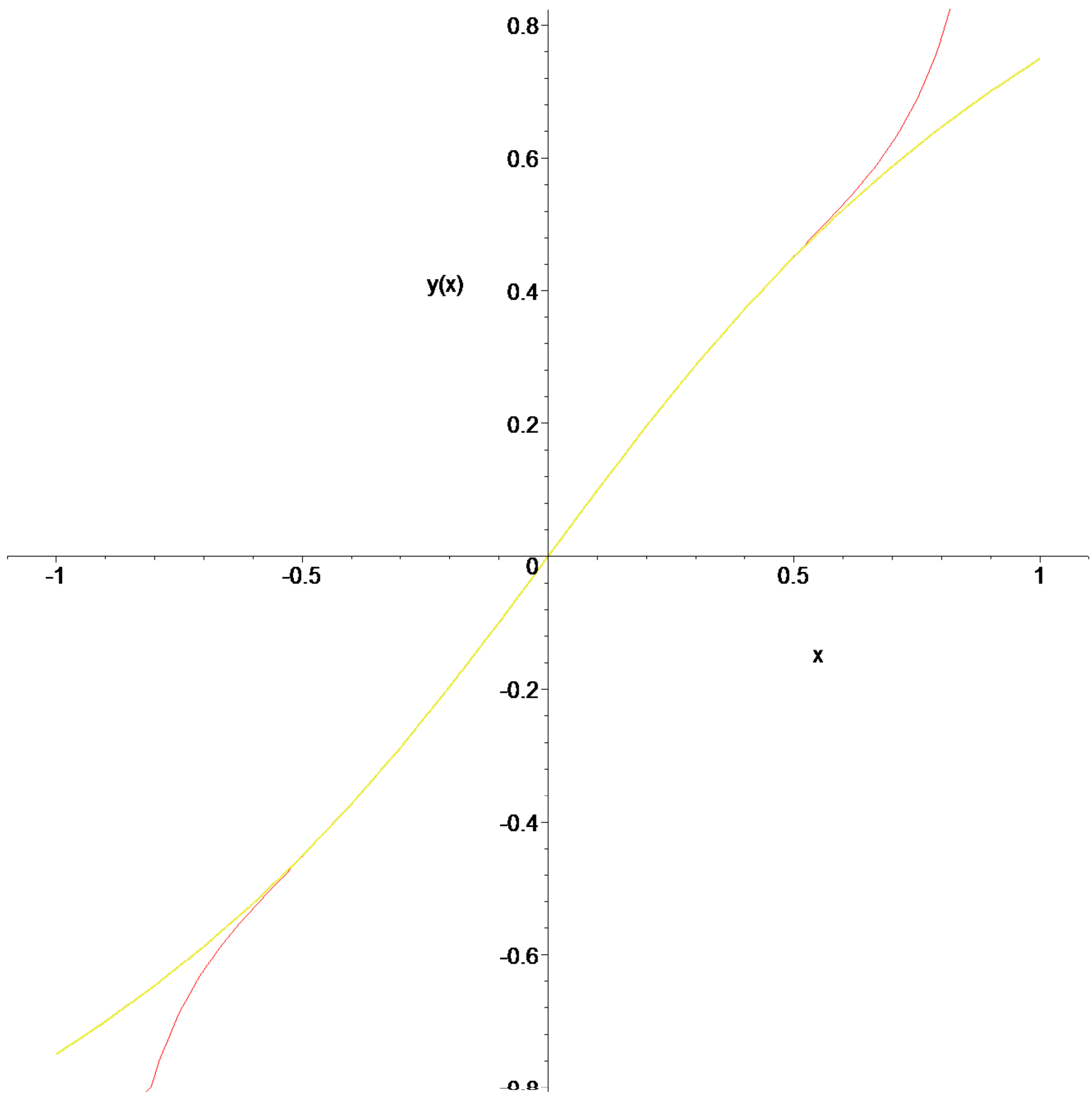
$$P := x - \frac{1}{2} x^3 + \frac{73}{120} x^5 - \frac{983}{1008} x^7 + \frac{648113}{362880} x^9$$

```
> with(plots):
Warning, the name changecoords has been redefined
```

```
> display([courbe,plot(P,x=-10..10)]);
```




```
> courbe1:=DEplot(edo,y(x),
  x=-1..1,[[y(0)=0]],arrows=none):display([courbe1,plot(P,x=-1..1)
  ]);
```


0.8
0.6
y(x)
0.4
0.2
-1
-0.5
0
0.5
1
x
-0.2
-0.4
-0.6

>