Soit $0 < a < b$ des réels, et $h \in \mathbb{R}$.
Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x, h) = (x - a)(b - x) + hx^3$.
Pour cette question seulement, on prend $a = 1$ et $b = 2$.
Tracer sur un même dessin des graphes pour différentes valeurs de $h \in [0, 1/10]$ et $x \in [0, 10]$.
Pour h assez petit, montrer qu'on a 3 racines de f telles que :
$0 < x_1(h) < a < b < x_2(h) < x_3(h)$.
On considère x_1, x_2, x_3 comme des fonctions de h.
Démontrer qu'il existe $r > 0$ tel qu'on peut prolonger x_1 et x_2 sur $[0, r]$ et x_3 sur $]0, r]$ en fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$.
Montrer que x_1 admet un développement limité à l'ordre 4 en 0 et calculer (avec Maple) ce développement.
Montrer que x_3 admet un développement asymptotique à l'ordre 4 en 0 et calculer ce développement.
Justifier l'existence de $I(h) = \displaystyle\int_{x_1(h)}^{x_2(h)} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{f(x,h)}}$ puis la calculer en posant $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2} + \dfrac{x_2 - x_1}{2} \sin t$. *Centrale*

O19-078