

$f(x, y, z) = k$ est une équation de quadrique. On réduit cette équation.
 f admet un point critique $(25/17, 1/17, 3/17)$ donc il s'agit d'une quadrique à centre. On change de repère pour placer ce centre à l'origine.
On réduit la matrice A : les 3 valeurs propres sont positives donc f a un minimum au centre de la quadrique et n'est pas majorée.
Les 3 valeurs propres sont même strictement positives donc Φ est un produit scalaire.
On achève de réduire en repère orthonormé et on peut représenter.

[O18-C043

[> restart;

[> with(LinearAlgebra):

[> A:=Matrix(3,3,[2,1,0,1,3,2,0,2,5]);B:=Vector([3,2,1]);

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$B := \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

[> X:=Vector([x,y,z]);

$$X := \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

[> surf:=Transpose(X).A.X-2*Transpose(B).X;

$$\text{surf} := x(2x+y) + y(x+3y+2z) + z(2y+5z) - 6x - 4y - 2z$$

[> with(VectorCalculus):gl:=op(Gradient(surf,[x,y,z]));

gl := 3, {(1)=4x+2y-6, (2)=2x+6y+4z-4, (3)=4y+10z-2}, datatype=anything, storage=rectangular, order=Fortran_order, attributes=[vectorfield, coords=cartesian_{x,y,z}], shape=[]

[> sys:={4*x+2*y-6,2*x+6*y+4*z-4,4*y+10*z-2};solve(sys);

$$\text{sys} := \{4x + 2y - 6, 4y + 10z - 2, 2x + 6y + 4z - 4\}$$

$$\left\{ x = \frac{25}{17}, y = \frac{1}{17}, z = \frac{3}{17} \right\}$$

[> surf2:=simplify(subs(x=25/17+x1,y=1/17+y1,z=3/17+z1,surf));

$$\text{surf2} := -\frac{80}{17} + 2x1^2 + 2x1y1 + 3y1^2 + 4y1z1 + 5z1^2$$

[> red:=[Eigenvectors(A)];l:={seq(Column(red[2],i),i=1..3)};evalf(red[1]);

$$\text{red} := \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{9}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2} \\ \frac{9}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2} \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{3}{2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}\right)\left(\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}\right)} \\ \frac{3}{2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}\right)} \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{3}{2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}\right)\left(\frac{5}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}\right)} \\ \frac{3}{2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}\right)} \\ 1 \end{bmatrix} \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$l := \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{3}{2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}\right)\left(\frac{5}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}\right)} \\ \frac{3}{2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}\right)} \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{3}{2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}\right)\left(\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}\right)} \\ \frac{3}{2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}\right)} \\ 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6.302775638 \\ 2.697224362 \\ 1. \end{bmatrix}$$

[> ll:=simplify(GramSchmidt(l,normalized));

$$ll := \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}(5+\sqrt{13})(5+2\sqrt{13})}{18\sqrt{65+17\sqrt{13}}} \\ -\frac{\sqrt{2}(5+2\sqrt{13})}{3\sqrt{65+17\sqrt{13}}} \\ \frac{\sqrt{2}(7+\sqrt{13})}{3\sqrt{65+17\sqrt{13}}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ -2 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{65+17\sqrt{13}}} \\ \frac{(5+\sqrt{13})\sqrt{2}}{2\sqrt{65+17\sqrt{13}}} \\ \frac{\sqrt{2}(3+\sqrt{13})}{\sqrt{65+17\sqrt{13}}} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

[> P:=Matrix([op(ll)]);

$$P := \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}(5+\sqrt{13})(5+2\sqrt{13})}{18\sqrt{65+17\sqrt{13}}} & \frac{2}{3} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{65+17\sqrt{13}}} \\ -\frac{\sqrt{2}(5+2\sqrt{13})}{3\sqrt{65+17\sqrt{13}}} & -\frac{2}{3} & \frac{(5+\sqrt{13})\sqrt{2}}{2\sqrt{65+17\sqrt{13}}} \\ \frac{\sqrt{2}(7+\sqrt{13})}{3\sqrt{65+17\sqrt{13}}} & \frac{1}{3} & \frac{\sqrt{2}(3+\sqrt{13})}{\sqrt{65+17\sqrt{13}}} \end{bmatrix}$$

> `NCoord:=P.Vector([x2,y2,z2]);`

$$NCoord := \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}(5+\sqrt{13})(5+2\sqrt{13})x2}{18\sqrt{65+17\sqrt{13}}} + \frac{2y2}{3} + \frac{\sqrt{2}z2}{\sqrt{65+17\sqrt{13}}} \\ -\frac{\sqrt{2}(5+2\sqrt{13})x2}{3\sqrt{65+17\sqrt{13}}} - \frac{2y2}{3} + \frac{(5+\sqrt{13})\sqrt{2}z2}{2\sqrt{65+17\sqrt{13}}} \\ \frac{\sqrt{2}(7+\sqrt{13})x2}{3\sqrt{65+17\sqrt{13}}} + \frac{y2}{3} + \frac{\sqrt{2}(3+\sqrt{13})z2}{\sqrt{65+17\sqrt{13}}} \end{bmatrix}$$

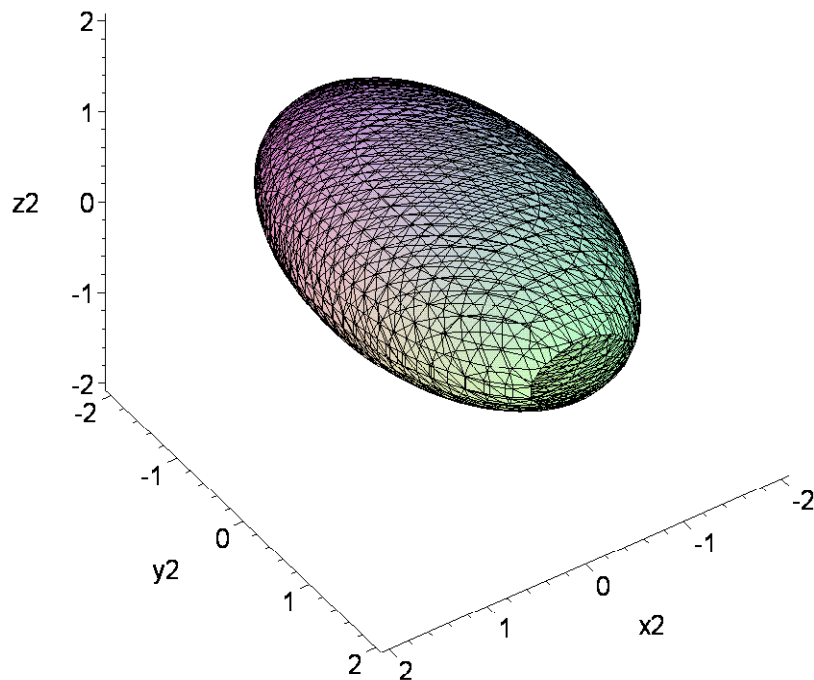
> `surf3:=simplify(subs(x1=NCoord[1],y1=NCoord[2],z1=NCoord[3],surf2));evalf(surf3);`

$$surf3 := \frac{-5200 - 1360\sqrt{13} + 3094x2^2 + 748x2^2\sqrt{13} + 6851z2^2 + 1853z2^2\sqrt{13} + 1105y2^2 + 289y2^2\sqrt{13}}{17(65 + 17\sqrt{13})}$$

$$-4.705882350 + 2.697224362x2^2 + 6.302775635z2^2 + 0.9999999994y2^2$$

> `with(plots):`

> `implicitplot3d(surf3,x2=-2..2,y2=-2..2,z2=-2..2,grid=[30,30,30]);`



>