1. Soit $c \in M$, $(z_n)$ associée à $c$ et $(z'_n)$ associée à $\overline{c}$.
   Par récurrence, $\forall n,\ z'_n = \overline{z_n}$ donc $\overline{c} \in M$.
2. $l_1$ et $l_2$ sont les deux racines de $l = l^2 + c$ donc $l_1 = 1/2 - \sqrt{\rho}\exp(i\theta/2)$ et $l_2 = 1/2 + \sqrt{\rho}\exp(i\theta/2)$.
3. $|P'_c(l_k)|^2 = 4\rho \pm 4\sqrt{\rho}\cos\theta/2 + 1 = 4(\sqrt{\rho} \pm (\cos\theta/2)/2)^2 + \sin^2\theta/2$.
   On peut choisir $\theta \in [-\pi, \pi]$.
   Si $\rho < 1/2(1+\cos\theta) = \cos^2(\theta/2)$, alors $\sqrt{\rho} < |\cos\theta/2| = \cos\theta/2$ et $|P'_c(l_1)|^2 < 4(\cos\theta/2)/2)^2 + \sin^2\theta/2 = 1$.
4. De même, si $\rho < 1/2(1+\cos\theta)$, $|P'_c(l_k)|^2 > 1$ pour $k = 1$ et $2$ donc si $(z_n)$ avait une limite $(l_k)$, alors $\left|\dfrac{z_{n+1} - l_k}{z_n - l_k}\right| = \left|\dfrac{P_c(z_n) - P_c(l_k)}{z_n - l_k}\right|$ aurait une limite strictement supérieure à 1 donc $(|z_n - l_k|)$ serait croissante pour $n$ assez grand donc les limites éventuelles ne sont pas possibles : la suite est peut-être bornée mais pas convergente.
5. Par récurrence, $\forall n,\ |z_n| \geq u_n$ donc si $(u_n)$ n'est pas bornée, alors $(z_n)$ non plus.
   On étudie la fonction $R \to \mathbb{R}$ définie par $t \mapsto t^2 - |c|$ et la méthode usuelle donne que , si $|c| > 2$, alors la suite $(u_n)$ est monotone croissante minorée par 2 sans limite possible dans $\mathbb{R}$ donc $\lim u_n = +\infty$.
   Conclusion : $M \subset \overline{B}(0, 2)$.

O18-903

```
> restart;
> suite:=proc(c)
  local k,z;
  z:=array(0..40);
  z[0]:=0;
  for k from 1 to 40 do
           z[k]:=(z[k-1])^2+c
  od;
  return evalf([seq(z[k],k=0..40)],2);
  end;
```

*suite* := **proc**($c$)
**local** $k$, $z$;
$z$ := array(0 .. 40); $z$[0] := 0; **for** $k$ **to** 40 **do** $z[k] := z[k-1]$^2 + $c$ **end do**; **return** evalf([seq($z[k]$, $k$ = 0 .. 40)], 2)
**end proc**

```
> suite(-2.001);
```

[0., -2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.2, 2.7, 5.4, 27., 740., 550000., $0.31\ 10^{12}$, $0.95\ 10^{23}$, $0.90\ 10^{46}$, $0.80\ 10^{92}$, $0.65\ 10^{184}$, $0.42\ 10^{368}$, $0.18\ 10^{736}$, $0.31\ 10^{1471}$, $0.96\ 10^{2941}$, $0.93\ 10^{5882}$, $0.86\ 10^{11764}$, $0.74\ 10^{23528}$, $0.55\ 10^{47056}$, $0.30\ 10^{94112}$, $0.93\ 10^{188223}$, $0.86\ 10^{376446}$, $0.74\ 10^{752892}$, $0.55\ 10^{1505784}$, $0.30\ 10^{3011568}$, $0.90\ 10^{6023135}$, $0.80\ 10^{12046270}$, $0.64\ 10^{24092540}$, $0.41\ 10^{48185080}$, $0.17\ 10^{96370160}$, $0.29\ 10^{192740319}$, $0.83\ 10^{385480637}$, $0.68\ 10^{770961274}$, $0.47\ 10^{1541922548}$, Float(∞), Float(∞)]

```
> suite(-2);
```

[0., -2., 2., 2., 2., 2., 2., 2., 2., 2., 2., 2., 2., 2., 2., 2., 2., 2., 2., 2., 2., 2., 2., 2., 2., 2., 2., 2., 2., 2., 2., 2., 2., 2., 2., 2., 2., 2., 2., 2., 2.]

```
> suite(-1.5);
```

[0., -1.5, 0.75, -0.94, -0.62, -1.1, -0.26, -1.4, 0.55, -1.2, -0.077, -1.5, 0.73, -0.96, -0.57, -1.2, -0.12, -1.5, 0.70, -1.0, -0.49, -1.3, 0.079, -1.5, 0.73, -0.97, -0.57, -1.2, -0.12, -1.5, 0.71, -1.0, -0.51, -1.2, 0.041, -1.5, 0.74, -0.95, -0.61, -1.1, -0.22]

```
> suite(0.25);
```

[0., 0.25, 0.31, 0.35, 0.37, 0.39, 0.40, 0.41, 0.42, 0.42, 0.43, 0.44, 0.44, 0.44, 0.45, 0.45, 0.45, 0.45, 0.46, 0.46, 0.46, 0.46, 0.46, 0.46, 0.47, 0.47, 0.47, 0.47, 0.47, 0.47, 0.47, 0.47, 0.47, 0.47, 0.47, 0.48, 0.48, 0.48, 0.48, 0.48, 0.48]

```
> suite(0.26);
```

[0., 0.26, 0.33, 0.37, 0.39, 0.42, 0.43, 0.45, 0.46, 0.47, 0.48, 0.49, 0.50, 0.51, 0.52, 0.53, 0.54, 0.56, 0.57, 0.58, 0.60, 0.62, 0.65, 0.68, 0.72, 0.78, 0.87, 1.0, 1.3, 1.9, 4.0, 16., 260., 70000., $0.49\ 10^{10}$, $0.24\ 10^{20}$, $0.57\ 10^{39}$, $0.32\ 10^{78}$, $0.10\ 10^{156}$, $0.11\ 10^{311}$, $0.12\ 10^{621}$]

```
> suite(-1.75+0.45*I);
```

[0., $-1.8 + 0.45\,I$, $1.1 - 1.1\,I$, $-1.8 - 2.0\,I$, $-2.8 + 7.8\,I$, $-54. - 42.\,I$, $1100. + 4600.\,I$, $-0.20\ 10^{8} + 0.11\ 10^{8}\,I$, $0.28\ 10^{15} - 0.42\ 10^{15}\,I$, $-0.95\ 10^{29} - 0.24\ 10^{30}\,I$, $-0.46\ 10^{59} + 0.45\ 10^{59}\,I$, $0.17\ 10^{117} - 0.41\ 10^{118}\,I$, $-0.17\ 10^{236} - 0.14\ 10^{235}\,I$, $0.29\ 10^{471} + 0.47\ 10^{470}\,I$, $0.83\ 10^{941} + 0.28\ 10^{941}\,I$, $0.60\ 10^{1882} + 0.45\ 10^{1882}\,I$, $0.16\ 10^{3764} + 0.55\ 10^{3764}\,I$, $-0.28\ 10^{7528} + 0.18\ 10^{7528}\,I$, $0.46\ 10^{15055} - 0.97\ 10^{15055}\,I$, $-0.73\ 10^{30110} - 0.89\ 10^{30110}\,I$, $-0.26\ 10^{60220} + 0.13\ 10^{60221}\,I$, $-0.16\ 10^{120441} - 0.68\ 10^{120440}\,I$, $0.22\ 10^{240881} + 0.22\ 10^{240881}\,I$, $-0.16\ 10^{481760} + 0.98\ 10^{481761}\,I$, $-0.96\ 10^{963522} - 0.31\ 10^{963521}\,I$, $0.92\ 10^{1927044} + 0.59\ 10^{1927043}\,I$, $0.84\ 10^{3854088} + 0.11\ 10^{3854088}\,I$, $0.70\ 10^{7708176} + 0.18\ 10^{7708176}\,I$, $0.46\ 10^{15416352} + 0.26\ 10^{15416352}\,I$, $0.14\ 10^{30832704} + 0.23\ 10^{30832704}\,I$, $-0.34\ 10^{61665407} + 0.66\ 10^{61665407}\,I$, $-0.32\ 10^{123330814} - 0.45\ 10^{123330814}\,I$, $-0.10\ 10^{246661628} + 0.29\ 10^{246661628}\,I$, $-0.74\ 10^{493323255} - 0.58\ 10^{493323255}\,I$, $0.22\ 10^{986646510} + 0.86\ 10^{986646510}\,I$, $-0.69\ 10^{1973293020} + 0.37\ 10^{1973293020}\,I$, Float(undefined) − Float(∞) $I$, Float(∞) + Float(∞) $I$, Float(∞) + Float(∞) $I$, Float(∞) + Float(∞) $I$, Float(∞) + Float(∞) $I$]

```
> suite(-1+0.15*I);
```

[0., $-1. + 0.15\,I$, $-0.022 - 0.15\,I$, $-1.0 + 0.16\,I$, $0.020 - 0.17\,I$, $-1.0 + 0.14\,I$, $0.038 - 0.14\,I$, $-1.0 + 0.14\,I$, $0.020 - 0.13\,I$, $-1.0 + 0.14\,I$, $0.014 - 0.14\,I$, $-1.0 + 0.15\,I$, $0.020 - 0.15\,I$, $-1.0 + 0.14\,I$, $0.023 - 0.14\,I$, $-1.0 + 0.14\,I$, $0.020 - 0.14\,I$, $-1.0 + 0.14\,I$, $0.020 - 0.14\,I$, $-1.0 + 0.14\,I$, $0.020 - 0.14\,I$, $-1.0 + 0.14\,I$, $0.021 - 0.14\,I$, $-1.0 + 0.14\,I$, $0.020 - 0.14\,I$, $-1.0 + 0.14\,I$, $0.020 - 0.14\,I$, $-1.0 + 0.14\,I$, $0.020 - 0.14\,I$, $-1.0 + 0.14\,I$, $0.020 - 0.14\,I$, $-1.0 + 0.14\,I$, $0.020 - 0.14\,I$, $-1.0 + 0.14\,I$, $0.020 - 0.14\,I$, $-1.0 + 0.14\,I$, $0.020 - 0.14\,I$, $-1.0 + 0.14\,I$, $0.020 - 0.14\,I$, $-1.0 + 0.14\,I$, $0.020 - 0.14\,I$]

```
>
>
```