1. Soit $x$ la longueur de $AC$, $\alpha = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$, $\beta = (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$.
   L'aire du triangle $ABC$ est $a = \|\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{BC}\| = \|\overrightarrow{CB} \wedge \overrightarrow{CA}\|$ d'où $xr\sin\theta = lr\sin\beta = lx\sin\alpha$, tous les angles étant dans $[0,\pi]$.
   De plus $\alpha + \beta + \theta = \pi$ donc $\sin\beta = \sin(\alpha + \theta)$ et on a $\sin\alpha = \dfrac{r}{l}\sin\theta$.
   On trouve donc $x = \dfrac{l}{\sin\theta}\sin\beta = \dfrac{l}{\sin\theta}\left(\cos\theta\dfrac{r}{l}\sin\theta + \sin\theta\sqrt{1-(\dfrac{r}{l}\sin\theta)^2}\right) = r\cos\theta + \sqrt{l^2 - r^2\sin^2\theta}$.
2. En posant $\lambda = r/l$, on reconnait $x/r = Z(\lambda, \theta)$.
   $|\lambda^2\sin^2\theta| < 1$ donc on peut développer en série entière d'où la forme indiquée avec $u_n(t) = ....$
3. $|Z(\lambda,\theta) - Z_n(\lambda,\theta)| \leq \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$ avec $v_k = \lambda^{2k-1}\dfrac{(k-3/2)...3/2.1/2.1/2}{k!}$ et $\dfrac{v_k}{v_{k-1}} = ... \leq \lambda^2$ donc $|Z(\lambda,\theta) - Z_n(\lambda,\theta)| \leq \dfrac{\lambda^{2n+1}}{1-\lambda^2}$
   (on peut majorer $v_{n+1}$ par $\lambda^{2n+1}$)
4. $1 - \lambda^2\sin^2\theta$ ne s'annule pas donc $\theta \mapsto Z(\lambda,\theta)$ est $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et elle a une série de Fourier NCV sur $\mathbb{R}$ de la forme $a_0/2 + \displaystyle\sum_{1}^{+\infty} a_n\cos(n\theta)$. Les coefficients de Fourier n'ont pas de relation simple avec ce qui précède...

O18-902

```
> restart;
> Z:=(t,lambda)->cos(t)+1/lambda*sqrt(1-\lambda^2*(sin(t))^2);
```

$$Z := (t, \lambda) \to \cos(t) + \frac{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin(t)^2}}{\lambda}$$

```
> u:=(n,t)->product('k-3/2','k'=1..n)*(sin(t))^(2*n)/n!;
```

$$u := (n, t) \to \frac{\left(\prod_{'k'=1}^{n} 'k - \frac{3}{2}'\right) \sin(t)^{(2\,n)}}{n!}$$

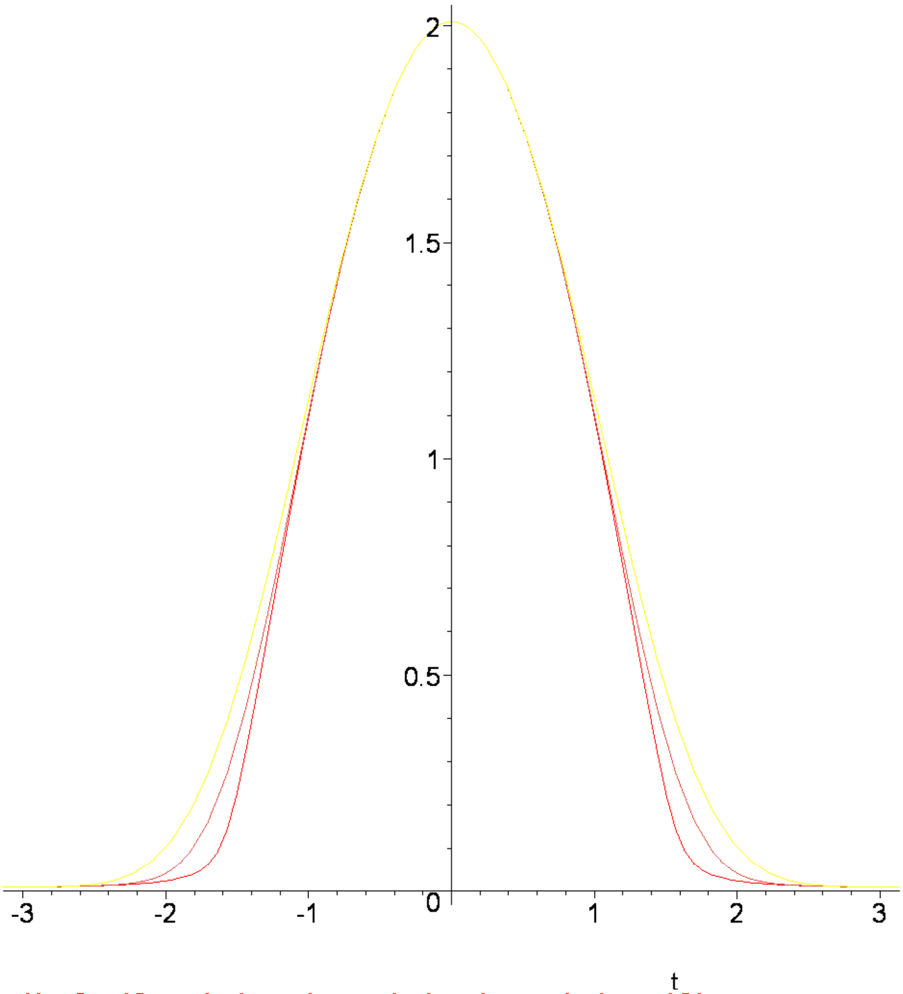
```
> evalf(u(3,1));
```

$$-0.02218783308$$

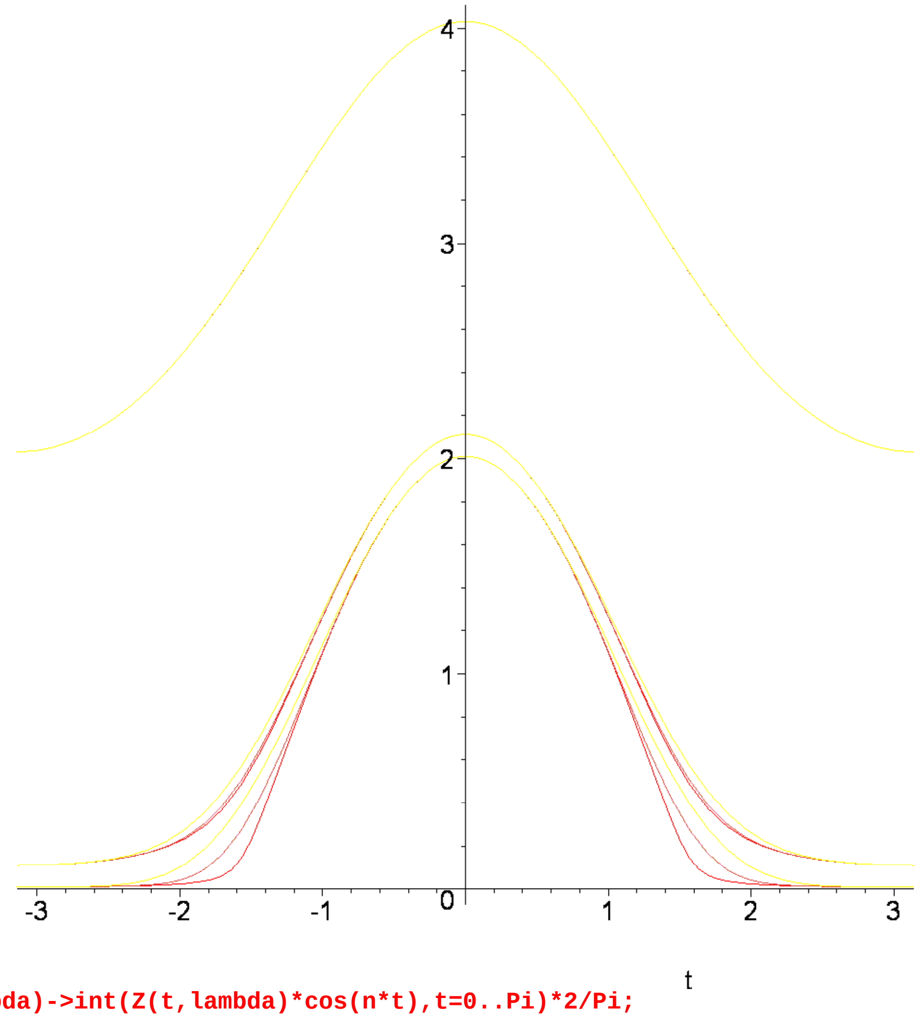
```
> Zn:=(n,t,lambda)->1/lambda+cos(t)+sum('u(k,t)*lambda^(2*k-1)','k'=1..n);
```

$$Zn := (n, t, \lambda) \to \frac{1}{\lambda} + \cos(t) + \left(\sum_{'k'=1}^{n} 'u(k, t)\, \lambda^{(2\,k-1)}'\right)$$

```
> courbe:=lambda->plot([Zn(2,t,lambda),Zn(5,t,lambda),Z(t,lambda)],t=-Pi..Pi,color=[yellow,orange,red]):
> courbe(0.99);
```




```
> with(plots):display([courbe(0.33),courbe(0.9),courbe(0.99)]);
```




```
> a:=(n,lambda)->int(Z(t,lambda)*cos(n*t),t=0..Pi)*2/Pi;
```

$$a := (n, \lambda) \to \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} Z(t, \lambda) \cos(n\, t)\, dt$$

```
> a(n,lambda);
```

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left( \cos(t) + \frac{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin(t)^2}}{\lambda} \right) \cos(n\, t)\, dt$$

```
> a(0,lambda);
```

$$\frac{4\, \mathrm{EllipticE}(\lambda)}{\lambda\, \pi}$$

```
>
```