1. A admet 6 valeurs propres distinctes dans $\mathbb{C}$ donc y est diagonalisable. Dans $\mathbb{R}$, elle n'est même pas trigonalisable.
2. $U =^t (1, 1, ..., 1)\sqrt{n}$ est vecteur propre unitaire associé à la valeur propre 1.

   L'espace propre est la droite engendrée par U. En effet, si $AX = X$, alors $\forall i$, $\displaystyle\sum_1^n a_{i,j}x_j = x_i = \sum_1^n a_{i,j}x_i$ donc $\displaystyle\sum_1^n a_{i,j}(\mathrm{Re}x_i - \mathrm{Re}x_j) = 0$ et en choisissant i pour que tous les termes soient dans $\mathbb{R}_+$, il faut qu'ils soient tous nuls donc $\mathrm{Re}x_j$ ne dépend pas de j (les $a_{i,j}$ ne sont pas nuls) et de même avec la partie imaginaire.
3. L'exemple laisse à penser que c'est une valeur propre d'ordre 1.
   Supposons que 1 soit au moins d'ordre 2. Il existe alors une trigonalisation dans $\mathbb{C}$ donc une base $(U, V, ...)$ telle que $AU = U, AV = \alpha U + V, ...$ et $\alpha \neq 0$ puisque l'espace propre est de dimension 1.

   Si $V =^t (v_1, v_2, ..., v_n)$, alors $\forall i$, $\displaystyle\sum_1^n a_{i,j}v_j = v_i + \alpha/\sqrt{n}$.

   En prenant la partie réelle ou imaginaire et en divisant, on obtient une relation $\displaystyle\sum_1^n a_{i,j}w_j = w_i + 1$ avec des w_j réels. En choisissant i pour que $w_i = \max w_j$, on a $w_i + 1 \leq w_i$ donc c'est absurde.
4. Si $AX = \lambda X$ et $|x_i| = \max |x_j|$, alors $\lambda = \displaystyle\sum_1^n a_{i,j}\frac{x_j}{x_i}$ donc en majorant le module, on a le résultat.
5. Il semble que la suite converge vers un vecteur colinéaire à U.

   La matrice $\tilde{A}$ est elle aussi stochastique diagonalisable sous forme $\tilde{A} = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 1 & ... & \\ & -1/7 & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$ et U est la première colonne de P.

   $X_n = PD^nP^{-1}X_0$ a pour limite $P\begin{pmatrix} 1 & ... & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}P^{-1}X_0$ ie à un facteur près, la 1ère colonne de P.

O18-901

```
> restart;
> with(LinearAlgebra);
```

[&x, Add, Adjoint, BackwardSubstitute, BandMatrix, Basis, BezoutMatrix, BidiagonalForm, BilinearForm, CharacteristicMatrix, CharacteristicPolynomial, Column, ColumnDimension, ColumnOperation, ColumnSpace, CompanionMatrix, ConditionNumber, ConstantMatrix, ConstantVector, Copy, CreatePermutation, CrossProduct, DeleteColumn, DeleteRow, Determinant, Diagonal, DiagonalMatrix, Dimension, Dimensions, DotProduct, EigenConditionNumbers, Eigenvalues, Eigenvectors, Equal, ForwardSubstitute, FrobeniusForm, GaussianElimination, GenerateEquations, GenerateMatrix, Generic, GetResultDataType, GetResultShape, GivensRotationMatrix, GramSchmidt, HankelMatrix, HermiteForm, HermitianTranspose, HessenbergForm, HilbertMatrix, HouseholderMatrix, IdentityMatrix, IntersectionBasis, IsDefinite, IsOrthogonal, IsSimilar, IsUnitary, JordanBlockMatrix, JordanForm, KroneckerProduct, LA_Main, LUDecomposition, LeastSquares, LinearSolve, Map, Map2, MatrixAdd, MatrixExponential, MatrixFunction, MatrixInverse, MatrixMatrixMultiply, MatrixNorm, MatrixPower, MatrixScalarMultiply, MatrixVectorMultiply, MinimalPolynomial, Minor, Modular, Multiply, NoUserValue, Norm, Normalize, NullSpace, OuterProductMatrix, Permanent, Pivot, PopovForm, QRDecomposition, RandomMatrix, RandomVector, Rank, RationalCanonicalForm, ReducedRowEchelonForm, Row, RowDimension, RowOperation, RowSpace, ScalarMatrix, ScalarMultiply, ScalarVector, SchurForm, SingularValues, SmithForm, StronglyConnectedBlocks, SubMatrix, SubVector, SumBasis, SylvesterMatrix, ToeplitzMatrix, Trace, Transpose, TridiagonalForm, UnitVector, VandermondeMatrix, VectorAdd, VectorAngle, VectorMatrixMultiply, VectorNorm, VectorScalarMultiply, ZeroMatrix, ZeroVector, Zip]

```
> a:=Matrix(6, shape=Circulant[[1, 2, 3,4,5,6]])/21;
```

$$a := \begin{bmatrix} \frac{1}{21} & \frac{2}{21} & \frac{1}{7} & \frac{4}{21} & \frac{5}{21} & \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{1}{21} & \frac{2}{21} & \frac{1}{7} & \frac{4}{21} & \frac{5}{21} \\ \frac{5}{21} & \frac{2}{7} & \frac{1}{21} & \frac{2}{21} & \frac{1}{7} & \frac{4}{21} \\ \frac{4}{21} & \frac{5}{21} & \frac{2}{7} & \frac{1}{21} & \frac{2}{21} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{4}{21} & \frac{5}{21} & \frac{2}{7} & \frac{1}{21} & \frac{2}{21} \\ \frac{2}{21} & \frac{1}{7} & \frac{4}{21} & \frac{5}{21} & \frac{2}{7} & \frac{1}{21} \end{bmatrix}$$

```
> Eigenvalues(a);
```

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{-1}{7} \\ -\frac{1}{7}+\frac{1}{21} I \sqrt{3} \\ -\frac{1}{7}-\frac{1}{21} I \sqrt{3} \\ -\frac{1}{7}+\frac{1}{7} I \sqrt{3} \\ -\frac{1}{7}-\frac{1}{7} I \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

```
> aa:=Transpose(a);
```

$$aa := \begin{bmatrix} \frac{1}{21} & \frac{2}{7} & \frac{5}{21} & \frac{4}{21} & \frac{1}{7} & \frac{2}{21} \\ \frac{2}{21} & \frac{1}{21} & \frac{2}{7} & \frac{5}{21} & \frac{4}{21} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{2}{21} & \frac{1}{21} & \frac{2}{7} & \frac{5}{21} & \frac{4}{21} \\ \frac{4}{21} & \frac{1}{7} & \frac{2}{21} & \frac{1}{21} & \frac{2}{7} & \frac{5}{21} \\ \frac{5}{21} & \frac{4}{21} & \frac{1}{7} & \frac{2}{21} & \frac{1}{21} & \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{5}{21} & \frac{4}{21} & \frac{1}{7} & \frac{2}{21} & \frac{1}{21} \end{bmatrix}$$

```
> x[0]:=Vector([1,0,0,3,0,0]);
```

$$x_0 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

```
> n:=20;for k from 1 to n do x[k]:=aa.x[k-1] od:seq(evalf(x[k]),k=15..n);
```

$$n := 20$$

$$\begin{bmatrix} 0.6666666621 \\ 0.6666666644 \\ 0.6666666690 \\ 0.6666666713 \\ 0.6666666690 \\ 0.6666666644 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.6666666673 \\ 0.6666666680 \\ 0.6666666673 \\ 0.6666666660 \\ 0.6666666654 \\ 0.6666666660 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.6666666669 \\ 0.6666666665 \\ 0.6666666663 \\ 0.6666666665 \\ 0.6666666669 \\ 0.6666666670 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.6666666666 \\ 0.6666666666 \\ 0.6666666667 \\ 0.6666666668 \\ 0.6666666667 \\ 0.6666666666 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.6666666667 \\ 0.6666666667 \\ 0.6666666667 \\ 0.6666666667 \\ 0.6666666666 \\ 0.6666666667 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.6666666667 \\ 0.6666666667 \\ 0.6666666667 \\ 0.6666666667 \\ 0.6666666667 \\ 0.6666666667 \end{bmatrix}$$

```
>
```