Soit $u_n(x) = \dfrac{e^{in^2x}}{2^n}$.

1. $\|u_n\|_\infty^{\mathbb{R}} = \dfrac{1}{2^n}$ est le TG d'une série numérique CV et $\forall n, u_n \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ donc f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. $\forall n, u_n \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et pour un $p \in \mathbb{N}$, $u_n^{(p)}(x) = (in^2)^p u_n(x)$, $\|u_n^{(p)}\|_\infty^{\mathbb{R}} = \dfrac{n^{2p}}{2^n}$ et $\dfrac{n^{2p}}{2^n} = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ donc toutes les séries dérivées sont NCV sur $\mathbb{R}$ donc f est $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.
3. $a_p = \dfrac{1}{p!}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{i^p n^{2p}}{2^n}$.
   $|a_p x^p| = \dfrac{|x|^p}{p!}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^{2p}}{2^n}$ et on va prouver que $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} |a_p x^p| = 0$ est faux pour tout $x \neq 0$ pour conclure que la série de Taylor de f en 0 est de rayon de convergence nul.
   Pour cela, on cherche une minoration de $|a_p x^p|$ pour un $p \in \mathbb{N}^*$.
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\forall t \in [n-1, n],\ t^{2p} \leq n^{2p}$ et $\dfrac{1}{2^{t+1}} \leq \dfrac{1}{2^n}$ donc :
   $$|a_p x^p| \geq \frac{|x|^p}{p!}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{n-1}^{n} \frac{t^{2p}}{2^{t+1}}\,\mathrm{d}t\right),\ \text{ou}$$
   $$|a_p x^p| \geq \frac{|x|^p}{p!}\int_{0}^{+\infty} \frac{t^{2p}}{2^{t+1}}\,\mathrm{d}t.$$
   En changeant de variable ($t = \dfrac{u}{\ln 2}$) et en remarquant que $\displaystyle\int_0^{+\infty} u^{2p}e^{-u}\,\mathrm{d}u = \Gamma(2p+1) = (2p)!$, il vient :
   $$|a_p x^p| \geq \frac{|x|^p (2p)!}{2p!((\ln 2)^{2p+1}} = m_p.$$
   D'après la formule de Stirling :
   $$m_p \underset{p\to+\infty}{\sim} K\left(\frac{4xp}{e\ln^2 2}\right)^p,$$
   où $K \in \mathbb{R}_+^*$ ne dépend pas de p et $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} m_p = +\infty$, d'où la conclusion.

P.Raph-O-900

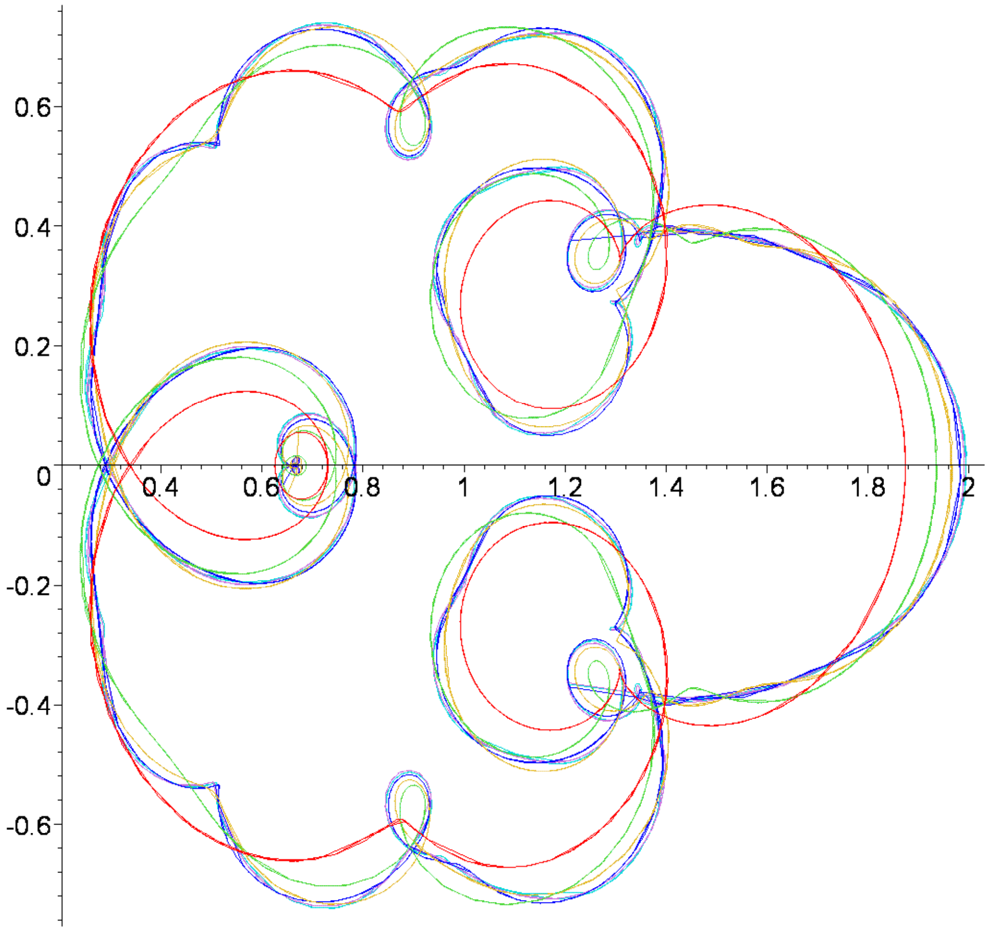
```
> restart;
> s:=(x,n)->sum('exp(I*k^(2)*x)/2^k','k'=0..n);
```

$$s := (x, n) \to \sum_{'k'=0}^{n} '\frac{e^{(k^2 x I)}}{2^k}'$$

```
> with(plots);
```

[*animate, animate3d, animatecurve, arrow, changecoords, complexplot, complexplot3d, conformal, conformal3d, contourplot, contourplot3d, coordplot, coordplot3d, densityplot, display, dualaxisplot, fieldplot, fieldplot3d, gradplot, gradplot3d, graphplot3d, implicitplot, implicitplot3d, inequal, interactive, interactiveparams, intersectplot, listcontplot, listcontplot3d, listdensityplot, listplot, listplot3d, loglogplot, logplot, matrixplot, multiple, odeplot, pareto, plotcompare, pointplot, pointplot3d, polarplot, polygonplot, polygonplot3d, polyhedra_supported, polyhedraplot, rootlocus, semilogplot, setcolors, setoptions, setoptions3d, spacecurve, sparsematrixplot, surfdata, textplot, textplot3d, tubeplot*]

```
> complexplot([seq(s(x,p),p=3..8)],x=-10..10);
```




```
> for p from 0 to 9 do a[p]:=sum('I^p*k^(2*p)/2^k/p!','k'=0..+infinity) od;
```

$$a_0 := 2$$

$$a_1 := 6\,I$$

$$a_2 := -75$$

$$a_3 := -1561\,I$$

$$a_4 := \frac{181945}{4}$$

$$a_5 := \frac{34082521}{20}\,I$$

$$a_6 := \frac{-1872771173}{24}$$

$$a_7 := \frac{-3547114323481}{840} I$$

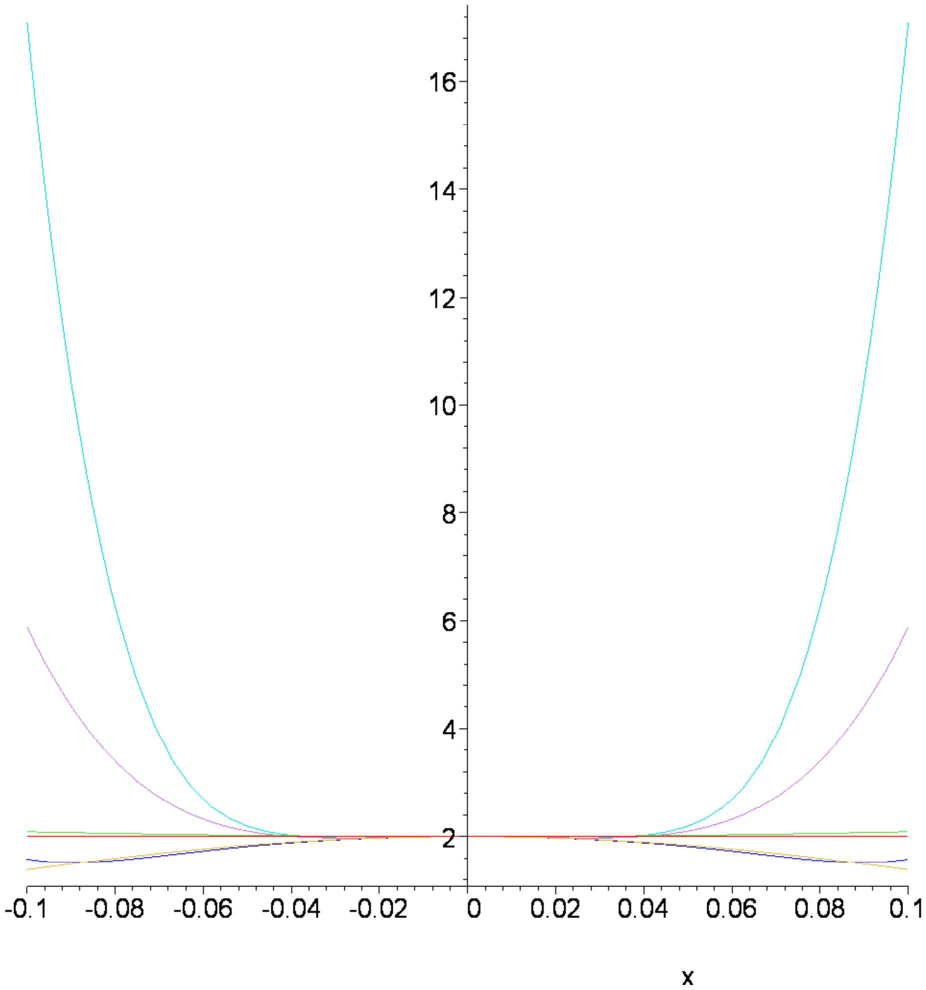
$$a_8 := \frac{354376978798757}{1344}$$

$$a_9 := \frac{161215936345564063}{8640} I$$

```
> g:=(x,p)->abs(sum('a[k]*x^k',k=0..p));
```

$$g := (x, p) \rightarrow \left| \sum_{k=0}^{p} {}'a_k\, x^{k}{}' \right|$$

```
> plot([seq(g(x,p),p=0..5)],x=-0.1..0.1);
```




```
>
```