

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{in^2x}}{2^n}.$$

1. Montrer que f est définie sur \mathbb{R} .
2. Montrer que f est continue ; montrer que f est \mathcal{C}^∞ .
3. Tracer la courbe paramétrée $x \mapsto M(x)$ où $M(x)$ est le point d'affixe $f(x)$. (On utilisera complexplot avec la somme partielle à un rang approprié)
4. $a_p = \frac{f^{(p)}(0)}{p!}$. Calculer a_0, a_1, \dots, a_9 .
5. $G_p(x) = \left| \sum_{k=0}^p a_k x^k \right|$. Représenter G_p pour $p = 0..5$ (Superposer les courbes)
6. Montrer que $\sum a_p x^p$ est divergente pour tous les x réels non nuls.

(Centrale-PC(Raph))

O18-900