

Résoudre $y'' = (1+x)y' + y$ et tracer quelques courbes pour $y(0) = 1$.

Donner le développement de Taylor à l'ordre 16 de la solution vérifiant $y(0) = y'(0) = 1$. Quelle conjecture peut-on émettre ?

On pose $I_0 = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note I_n le nombre d'applications f de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans lui-même, vérifiant $f \circ f = Id$. Montrer que $I_{n+2} = I_{n+1} + (n+1)I_n$.

Calculer I_n pour $n \in \llbracket 1, 15 \rrbracket$.

Montrer que le rayon de convergence R de $\sum \frac{I_n}{n!} x^n$ est non nul.

Pour $x \in]-R, R[$, montrer que la somme $F(x)$ de cette série vaut $e^{x + \frac{x^2}{2}}$. Donner I_n en fonction de n et vérifier avec Maple. *Centrale*

O18-092