

Résoudre  $y'' = (1+x)y' + y$  et tracer quelques courbes pour  $y(0) = 1$ .

Donner le développement de Taylor à l'ordre 16 de la solution vérifiant  $y(0) = y'(0) = 1$ . Quelle conjecture peut-on émettre ?

On pose  $I_0 = 1$  et, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $I_n$  le nombre d'applications  $f$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  dans lui-même, vérifiant  $f \circ f = Id$ . Montrer que  $I_{n+2} = I_{n+1} + (n+1)I_n$ .

Calculer  $I_n$  pour  $n \in \llbracket 1, 15 \rrbracket$ .

Montrer que le rayon de convergence  $R$  de  $\sum \frac{I_n}{n!} x^n$  est non nul.

Pour  $x \in ]-R, R[$ , montrer que la somme  $F(x)$  de cette série vaut  $e^{x + \frac{x^2}{2}}$ . Donner  $I_n$  en fonction de  $n$  et vérifier avec Maple. *Centrale*

O18-092