1. Il semble que la suite $(f_n)$ converge ponctuellement sur $[0,3]$ (au moins) vers une fonction $l$ telle que $l(0) = f_0(0)$ et $f(t) = k$ si $t > 0$ où $k$ serait une constante.
   Soit $u_n(t) = e^{-t^2 - \frac{x^2}{t^n}}$ pour un $x > 0$ fixé.
   $(u_n)$ CV ponctuellement sur $]0, +\infty[$ de limite $h$ telle que $h(t) = 0$ si $t \in ]0,1[$, $h(1) = e^{-t^2 - x^2}$ et $h(t) = e^{-t^2}$ si $t > 1$ et $h$ est CM sur $]0, +\infty[$.
   $(u_n)$ est dominée sur $]0, +\infty[$ par $t \mapsto e^{-t^2}$ qui est $L^1(]0, +\infty[)$.
   D'après le thm de CV dominée, $h \in L^1(]0, +\infty[)$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} h = \lim \int_0^{+\infty} u_n = \lim f_n(x)$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} h = \int_1^{+\infty} e^{-t^2}\ \mathrm{d}t$ ne dépend effectivement pas de $x (> 0)$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé, $h = (t, x) \mapsto e^{-t^2 - \frac{x^2}{t^n}}$, $I = \mathbb{R}_+^*$ et $J = \mathbb{R}$.
   $h(t, .)$ est continue sur $J$ pour tout $t \in I$ et $h(., x)$ est CM sur $I$ pour tout $x \in J$.
   Domination (globale) de $h$ par $t \mapsto e^{-t^2}$ qui est $L^1(I)$.
   $f_n$ est donc continue sur $J$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé, $h = (t, x) \mapsto e^{-t^2 - \frac{x^2}{t^n}}$, $I = \mathbb{R}_+^*$ et $J = \mathbb{R}_+^*$.
   $h(t, .)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $J$ pour tout $t \in I$, $\dfrac{\partial h}{\partial x}(t, x) = \dfrac{-2x}{t^n} e^{-t^2 - \frac{x^2}{t^n}}$ et $\dfrac{\partial h}{\partial x}(., x)$ est CM sur $I$ pour tout $x \in J$.
   Domination locale de $\dfrac{\partial h}{\partial x}$ sur $[a, +\infty[$, $(a > 0)$ par $t \mapsto 2a \dfrac{e^{-t^2 - \frac{a^2}{t^n}}}{t^n}$ qui est $L^1(I)$.
   $f_n$ est donc $\mathcal{C}^1$ sur $J$ de dérivée $x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{-2x}{t^n} e^{-t^2 - \frac{x^2}{t^n}}\ \mathrm{d}t$.
4. $f_2'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{-2x}{t^2} e^{-t^2 - \frac{x^2}{t^2}}\ \mathrm{d}t = 2 \int_0^{+\infty} \left[ \left( \frac{-x}{t^2} - 1 \right) + 1 \right] e^{-(\frac{x}{t} - t)^2 - 2x}\ \mathrm{d}t = 2 \left( \int_{+\infty}^{-\infty} e^{-u^2 - 2x}\ \mathrm{d}u + f_2(x) \right)$,
   $f_2'(x) = 2\left(-2e^{-2x} f_2(0) + f_2(x)\right)$.
   $f_2$ est donc une solution de l'EDO $y' = 2y - 4e^{-2x} f_2(0)$ dont la solution générale est $y = x \mapsto e^{-2x} f_2(0) + K e^{2x}$ et $\lim\limits_0 y = f_2(0)$ (continuité) donne $K = 0$ donc $\forall x > 0,\ f_2(x) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2x}$. C'est encore vrai en 0 et (par parité), $\forall x \in \mathbb{R},\ f_2(x) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2|x|}$.

O18-086

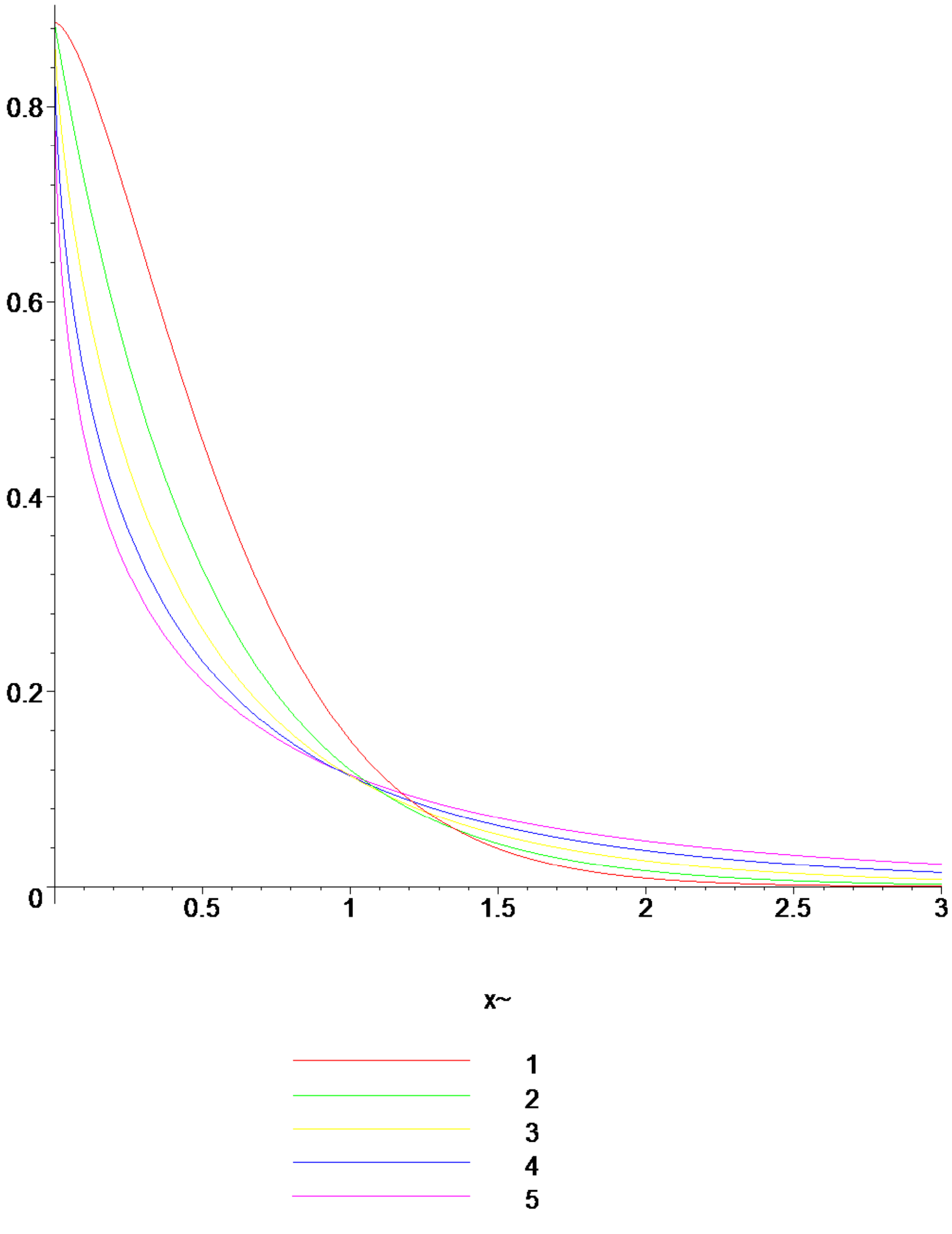
```
> restart:
> f:=(x,n)->int(exp(-t^2-x^2/t^n),t=0..infinity);
```

$$f := (x, n) \rightarrow \int_0^{\infty} \mathbf{e}^{\left(-t^2 - \frac{x^2}{t^n}\right)} \, dt$$

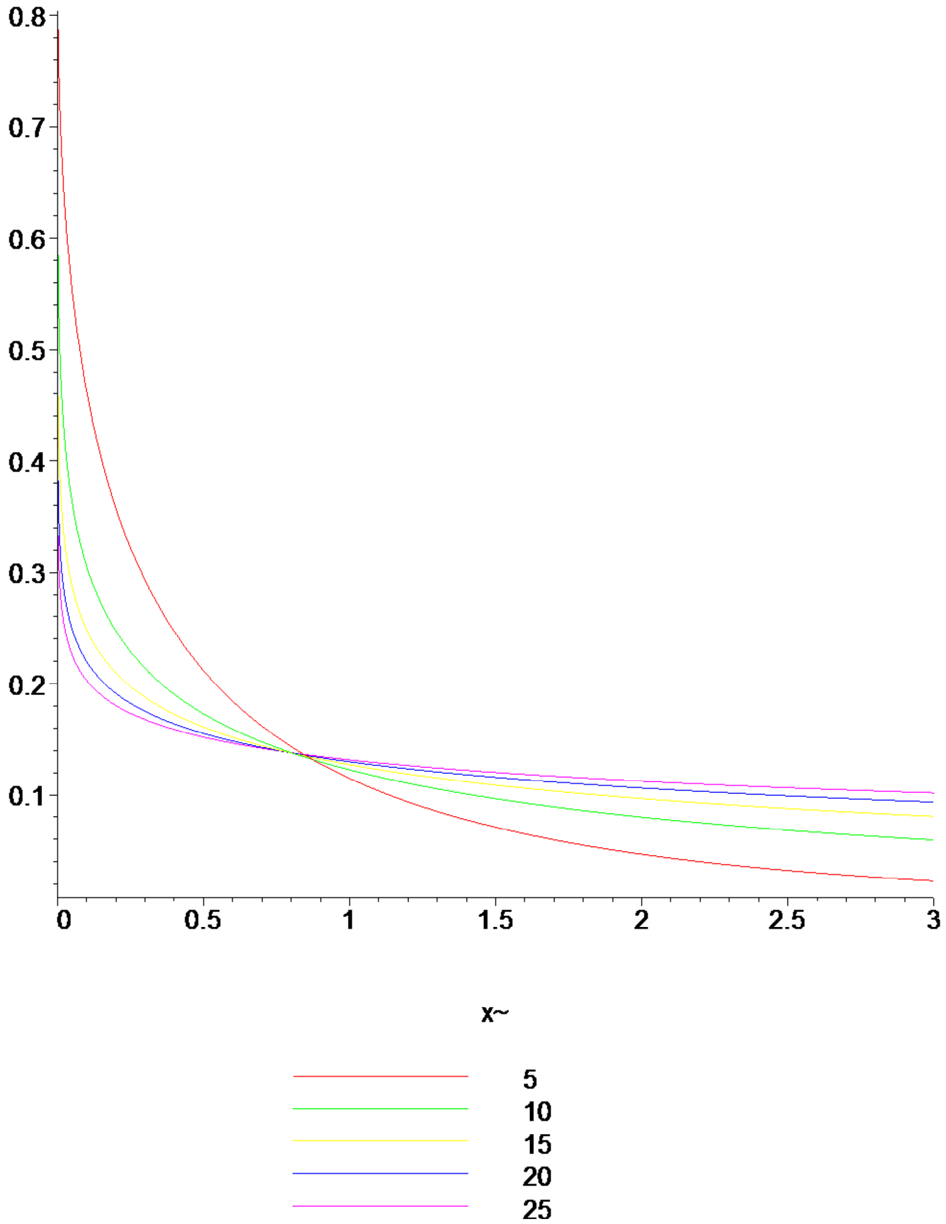
```
> seq(f(x,2),x=1..5);
```

$$\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\mathbf{e}^{(-2)}, \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\mathbf{e}^{(-4)}, \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\mathbf{e}^{(-6)}, \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\mathbf{e}^{(-8)}, \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\mathbf{e}^{(-10)}$$

```
> assume(x,real);plot([seq(f(x,n),n=1..5)],x=0..3,legend=[seq(conv
ert(n,string),n=1..5)]);
```




```
> plot([seq(f(x,5*n),n=1..5)],x=0..3,legend=[seq(convert(5*n,strin
g),n=1..5)]);
```




```
> assume(x>0);limit(f(x,n),n=infinity);
```

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^{\infty} \mathbf{e}^{\left(-t^2 - \frac{x\sim^2}{t^n}\right)} \, dt$$

```
> f(x,2);
```

$$\frac{1}{2} \frac{\sqrt{\pi}}{(\mathbf{e}^{x\sim})^2}$$

```
> l:=evalf(int(exp(-t^2),t=1..infinity));
```

$$l := 0.1394027925$$

```
>
```