1. Le tracé laisse à penser que l'origine est point double et que c'est le seul.
   Pour trouver les points doubles, on paramètre l'arc :
   $x = r\cos t, y = r\sin t$ donne $r = \dfrac{-5\sin^2 t + 3\sqrt{2}\cos^2 t}{\sin t(\sqrt{2}\sin^2 t - 3\cos^2 t)}$.
   On vérifie : Si $t_0 = \arctan\sqrt{\dfrac{3\sqrt{2}}{5}}$, on a $r(t_0) = r(-t_0) = 0$ d'où le point double O avec deux tangentes d'angles polaires resp. t_0 et $-t_0$.
   De plus, $t \mapsto r$ étant $2\pi-$périodique et $\forall t,\ r(t+\pi) = -r(t)$, il n'y a pas de point double vérifiant $r(t_1) = r(t_1 + 2k\pi) \neq 0$ ou $r(t_2) = -r(t_2 + (2k+1)\pi) \neq 0$.
   f n'a comme points critiques réels que $(0,0)$ et $(0, -5\sqrt{2}/3)$. Le second n'annule pas f donc le point critique sur la courbe coïncide avec le point double.
2. $X = x - y, Y = y - z, Z = z$ donne pour S : $\dfrac{1}{X} + \dfrac{1}{Y} - \dfrac{1}{X+Y} = 1$, équation où Z est absent, donc S est un cylindre de direction $X = Y = 0$ ie $d = (1,1,1)/\sqrt{3}$.
   On choisit par exemple $v_2 = (1,-1,0)/\sqrt{2}$ et $v_1 = v_2 \wedge d$ ce qui donne $surf2$ dans un repère $(O, x1, y1, z1)$.
   Cs est l'intersection avec le plan $z1 = 0$.

O18-082

```
> restart;
> f:=y^2*(5+y*sqrt(2))-3*x^2*(y+sqrt(2));
```

$$f := y^2 (5 + y\sqrt{2}) - 3x^2 (y + \sqrt{2})$$

```
> with(VectorCalculus):
> g1:=Gradient( f, [x,y] );gg1:=op(2,g1);
```

$$g1 := -6x(y+\sqrt{2})\,\bar{\mathbf{e}}_{\mathbf{x}} + (2y(5+y\sqrt{2}) + y^2\sqrt{2} - 3x^2)\,\bar{\mathbf{e}}_{\mathbf{y}}$$

$$gg1 := \{(1) = -6x(y+\sqrt{2}), (2) = 2y(5+y\sqrt{2}) + y^2\sqrt{2} - 3x^2\}$$

```
> sys:={-6*x*(y+2^(1/2)),2*y*(5+y*2^(1/2))+y^2*2^(1/2)-3*x^2};
```

$$sys := \{-6x(y+\sqrt{2}), 2y(5+y\sqrt{2}) + y^2\sqrt{2} - 3x^2\}$$

```
> solve(sys);subs(x = 0, y = -5/3*2^(1/2),f);
```

$$\{x=0, y=0\}, \{x=0, y=-\frac{5\sqrt{2}}{3}\}, \{x = 2\,\mathrm{RootOf}(\sqrt{2} + 3\,\_Z^2, label = \_L8), y = -\sqrt{2}\}$$

$$\frac{250}{27}$$

```
> fpolar:=subs([x=r*cos(t),y=r*sin(t)],f);
```

$$fpolar := r^2 \sin(t)^2 (5 + r\sin(t)\sqrt{2}) - 3r^2\cos(t)^2 (r\sin(t) + \sqrt{2})$$

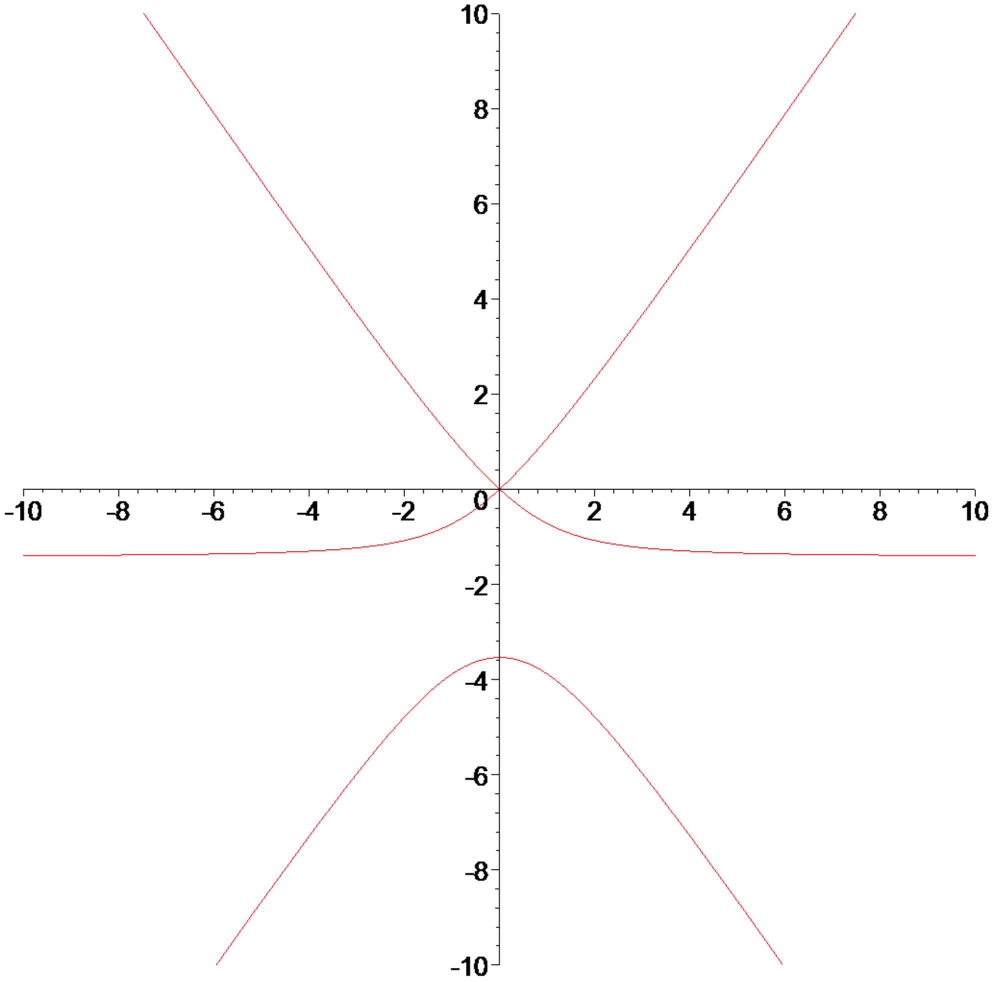
```
> solve(fpolar,r);
```

$$0, 0, \frac{-5\sin(t)^2 + 3\cos(t)^2\sqrt{2}}{\sin(t)(\sqrt{2}\sin(t)^2 - 3\cos(t)^2)}$$

```
> r:=(-5*sin(t)^2+3*cos(t)^2*2^(1/2))/sin(t)/(2^(1/2)*sin(t)^2-3*cos(t)^2);
```

$$r := \frac{-5\sin(t)^2 + 3\cos(t)^2\sqrt{2}}{\sin(t)(\sqrt{2}\sin(t)^2 - 3\cos(t)^2)}$$

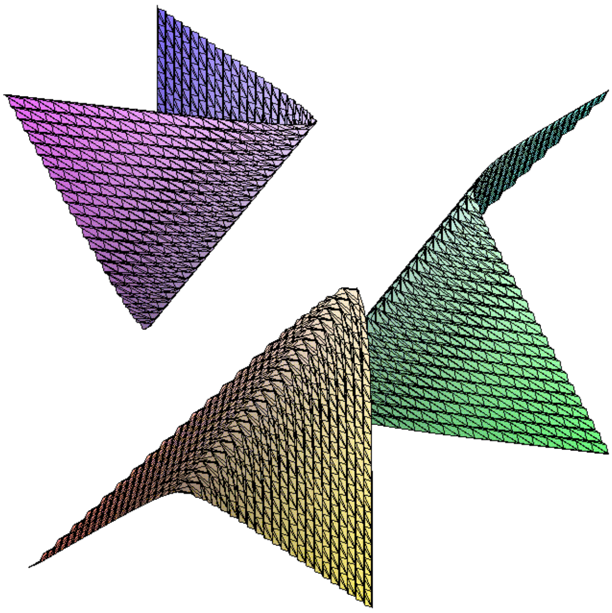
```
> with(plots):
> polarplot(r,view=[-10..10, -10..10],discont=true);
```



```
> surf:=1/(x-y)+1/(y-z)+1/(z-x)=1;
```

$$surf := \frac{1}{x-y} + \frac{1}{y-z} + \frac{1}{z-x} = 1$$

```
> implicitplot3d(surf, x=-5..5, y=-5..5, z=-5..5, grid=[30,30,30]);
```



```
> surf2:=subs(x=y1/sqrt(2)+x1/sqrt(6)+z1/sqrt(3),y=-y1/sqrt(2)+x1/sqrt(6)+z1/sqrt(3),z=-
2*x1/sqrt(6)+z1/sqrt(3),surf);
```

$$surf2 := \frac{\sqrt{2}}{2\, y1} + \frac{1}{-\frac{y1\sqrt{2}}{2} + \frac{x1\sqrt{6}}{2}} + \frac{1}{-\frac{x1\sqrt{6}}{2} - \frac{y1\sqrt{2}}{2}} = 1$$

```
> Cs:=simplify(subs(z1=0,surf2));
```

$$Cs := \frac{3\,(x1^2 + y1^2)\sqrt{2}}{2\, y1\,(-y1^2 + 3\, x1^2)} = 1$$

```
>
```