Soit $u_n(x) = \dfrac{e^{-nx}}{n^2-1}$.
Si $x < 0$, alors $\sum u_n(x)$ est GDV ; si $x \geq 0$, alors $u_n(x) = O(1/n^2)$ donc $\sum u_n(x)$ est ACV.
$\sum u_n$ est à termes dans $\mathcal{C}^0([0,+\infty[)$ et $\|u_n\|_\infty^{[0,+\infty[} = u_n(0)$ donc $\sum u_n$ CV normalement sur $[0,+\infty[$ et donc f est $\mathcal{C}^0$ sur $[0,+\infty[$.
$\sum u_n$ est à termes dans $\mathcal{C}^1(]0,+\infty[)$ et pour tout $a > 0$, $\|u_n'\|_\infty^{[a,+\infty[} = |u_n'(a)| = o\left(\dfrac{n}{(na)(n^2-1)}\right)$ donc $\sum u_n'$ CV localement normalement sur $]0,+\infty[$ et donc f est $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.
Idem pour $\mathcal{C}^2(]0,+\infty[)$ avec $\|u"_n\|_\infty^{[a,+\infty[} = |u"_n(a)| = o\left(\dfrac{n^2}{(na)^2(n^2-1)}\right)$.
$\sum \int_0^{+\infty} |u_n|$ est une série numérique convergente donc $f \in L^1([0,+\infty[)$ et f est intégrable terme à terme sur $[0,+\infty[$.

> $restart;$

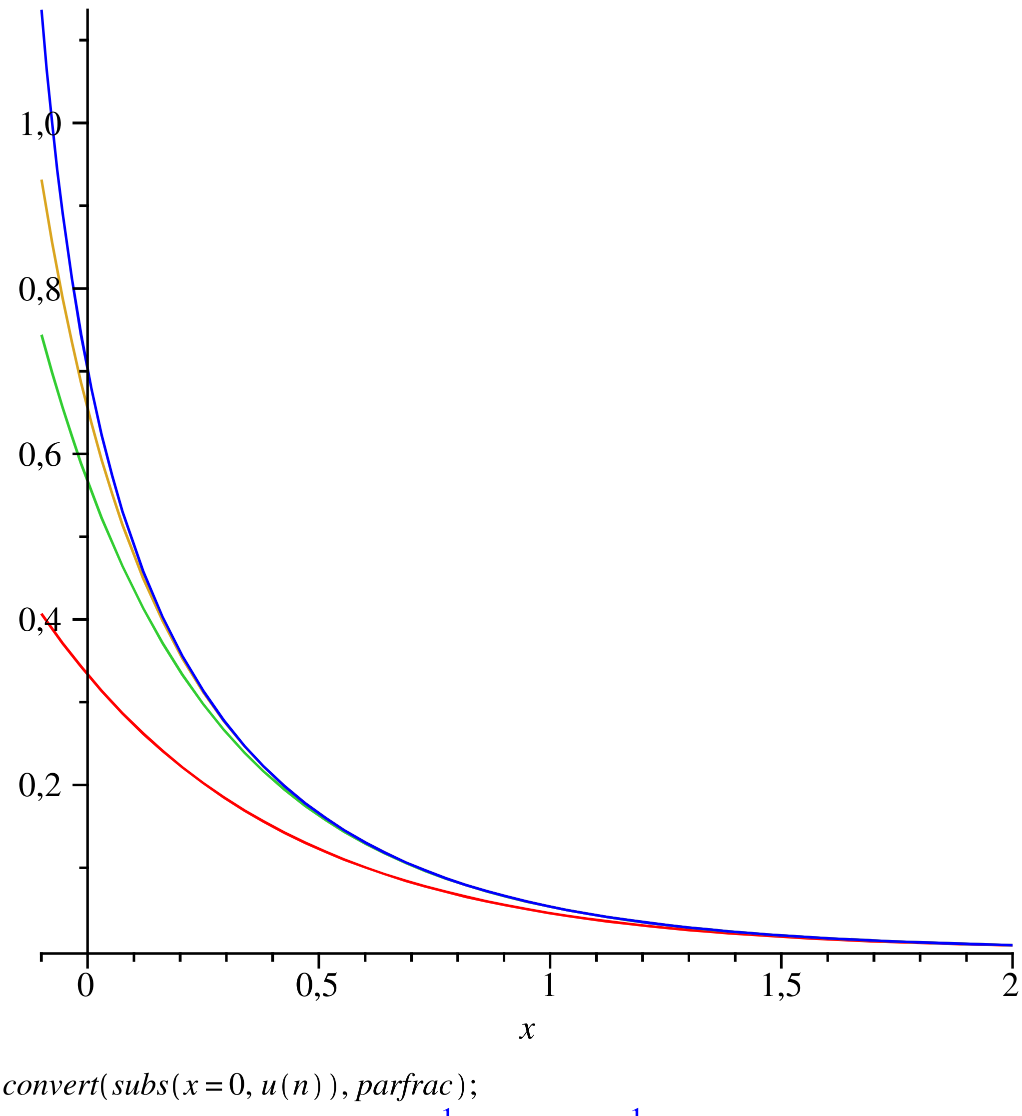
> $u := n \to \dfrac{\exp(-n \cdot x)}{(n^2) - 1};$

$$u := n \to \frac{e^{-n x}}{n^2 - 1} \quad \textbf{(1)}$$

> $s := n \to sum(u(p), p = 2..n);$

$$s := n \to \sum_{p=2}^{n} u(p) \quad \textbf{(2)}$$

> $plot([s(2), s(5), s(10), s(20)], x = -0.1..2);$



> $v := convert(subs(x = 0, u(n)), parfrac);$

$$v := -\frac{1}{2\,(n+1)} + \frac{1}{2\,(n-1)} \quad \textbf{(3)}$$

> $sum(v, n = 2..infinity);$

$$\frac{3}{4} \quad \textbf{(4)}$$

> $assume(n > 0);$

> $w := int(u(n), x = 0 .. +infinity);$

$$w := \frac{1}{\left(n\sim^2 - 1\right) n\sim} \tag{5}$$

> $t := convert(\mathrm{w}, parfrac);$

$$t := \frac{1}{2\,(n\sim - 1)} - \frac{1}{n\sim} + \frac{1}{2\,(n\sim + 1)} \tag{6}$$

> $sum(w, n = 2 ..infinity);$

$$\frac{1}{4} \tag{7}$$

> $i := n \rightarrow int(s(n), x = 0 .. + \infty);$

$$i := n \rightarrow \int_0^{\infty} s(n)\,\mathrm{d}x \tag{8}$$

> $map(evalf, [i(2), i(5), i(10), i(20)]);$

$$[0.1666666667, 0.2333333333, 0.2454545455, 0.2488095238] \tag{9}$$

>

>