1. y est $\mathcal{C}^\infty$ et $2\pi-$périodique donc développable en série de Fourier. De plus, $(in)^k c_n$ est le coefficient de Fourier de $y^{(k)}$ donc est de limite nulle.
2. $c_n(y") = -n^2 c_n(y)$ et $c_n(e^i x)y' = c_{n-1}(y') = i(n-1)c_{n-1}(y)$ d'où pour (E_0) :
   $\forall n \in \mathbb{Z},\ (1-n^2)c_n(y) + i(n-1)c_{n-1}(y) = 0.$
   Si $n \geq 1$, alors $c_n(y) = \dfrac{i}{n+1}c_{n-1}(y) = ... = 2\dfrac{i^{n-1}}{(n+1)!}c_1(y)$.
   $c_{-1}(y) = -ic_0(y)$.
   Si $n \leq -2$, alors $c_n(y) = ... = c_{-3}(y) = c_{-2}(y) = 0$.
   L'ensemble des solutions $2\pi-$périodiques est un ev de dimension 2 donc on a toutes les solutions.
3. $y_1(x) = 2/i^2 \displaystyle\sum_1^{+\infty} \frac{i^{k+1}}{(k+1)!}e^{ikx} = -2e^{-ix}(\exp(ie^{ix}) - 1 - ie^{ix}) = 2i(-ie^{-ix}+1) - 2\exp(ie^{ix} - ix)$ et on reconnait le résultat de "dsolve" pour un choix de $C1, C2$. De même pour y_2.
4. "dsolve" donne bien le même résultat que la méthode de variation des constantes pour (E), mais ce résultat (fonction Ei de Maple) n'est utilisable que sur $]-3\pi/2, \pi/2[$.
   On peut aussi remarquer que la méthode utilisée pour (E_0) (recherche de solutions périodiques donne ici pour $p = -n \leq 0$: $c_p = c_n = \dfrac{(-i)^{n-1}(n-2)!}{2}$ donc $\displaystyle\lim_{\pm\infty} c_n = 0$ serait faux : il n'y a pas de solution périodique.

O17-C029

```
> restart:
> E0:=diff(y(x),x$2)+exp(I*x)*diff(y(x),x)+y(x)=0;
```

$$E0 := \left(\frac{d^2}{dx^2}\,y(x)\right) + e^{(x\,I)}\left(\frac{d}{dx}\,y(x)\right) + y(x) = 0$$

```
> E:=diff(y(x),x$2)+exp(I*x)*diff(y(x),x)+y(x)=exp(-I*x);
```

$$E := \left(\frac{d^2}{dx^2}\,y(x)\right) + e^{(x\,I)}\left(\frac{d}{dx}\,y(x)\right) + y(x) = e^{(-I\,x)}$$

```
> solE0:=dsolve(E0,y(x));z:=subs(solE0,y(x));
```

$$solE0 := y(x) = \_C1\,(1 - e^{(-I\,x)}\,I) + \_C2\,e^{(-I\,(x - e^{(x\,I)}))}$$

$$z := \_C1\,(1 - e^{(-I\,x)}\,I) + \_C2\,e^{(-I\,(x - e^{(x\,I)}))}$$

```
> a:=int(z,x=-Pi..Pi)/2/Pi;b:=int(z*exp(-I*x),x=-Pi..Pi)/2/Pi;
```

$$a := \_C1 + \_C2\,I$$

$$b := -\frac{\_C2}{2}$$

```
> y1:=subs(solve({a,b-1}),z);
```

$$y1 := 2\,I\,(1 - e^{(-I\,x)}\,I) - 2\,e^{(-I\,(x - e^{(x\,I)}))}$$

```
> y2:=subs(solve({a-1,b}),z);
```

$$y2 := 1 - e^{(-I\,x)}\,I$$

```
> sys:={c*y1+d*y2,c*diff(y1,x)+d*diff(y2,x)-exp(-I*x)};
```

$sys :=$

$$\{c\,(-2\,I\,e^{(-I\,x)} + 2\,I\,(1 - e^{(x\,I)}\,I)\,e^{(-I\,(x - e^{(x\,I)}))}) - d\,e^{(-I\,x)} - e^{(-I\,x)},\ c\,(2\,I\,(1 - e^{(-I\,x)}\,I) - 2\,e^{(-I\,(x - e^{(x\,I)}))}) + d\,(1 - e^{(-I\,x)}\,I)\}$$

```
> resol:=solve(sys,{c,d});
```

$$resol := \{d = -I\,(e^{(x\,I)} - I + e^{(-(x - e^{(x\,I)})\,I + x\,I)}\,I)\,e^{((x - e^{(x\,I)})\,I - 3\,I\,x)},\ c = \left(\frac{1}{2}\,e^{(x\,I)} - \frac{1}{2}\,I\right)e^{((x - e^{(x\,I)})\,I - 3\,I\,x)}\}$$

```
> Cprim:=subs(resol,c);Dprim:=subs(resol,d);
```

$$Cprim := \left(\frac{1}{2}\,e^{(x\,I)} - \frac{1}{2}\,I\right)e^{((x - e^{(x\,I)})\,I - 3\,I\,x)}$$

$$Dprim := -I\,(e^{(x\,I)} - I + e^{(-(x - e^{(x\,I)})\,I + x\,I)}\,I)\,e^{((x - e^{(x\,I)})\,I - 3\,I\,x)}$$

```
> CC:=int(Cprim,x);
```

$$CC := \frac{\frac{1}{4}\,I}{e^{(x\,I)}\,e^{(e^{(x\,I)}\,I)}} + \frac{1}{4}\,\mathrm{Ei}(1, e^{(x\,I)}\,I) + \frac{1}{4}\,\frac{1}{(e^{(x\,I)})^2\,e^{(e^{(x\,I)}\,I)}}$$

```
> DD:=int(Dprim,x);
```

$$DD := -I\left(\frac{\frac{1}{2}\,I}{e^{(x\,I)}\,e^{(e^{(x\,I)}\,I)}} + \frac{1}{2}\,\mathrm{Ei}(1, e^{(x\,I)}\,I) + \frac{1}{2}\,\frac{1}{(e^{(x\,I)})^2\,e^{(e^{(x\,I)}\,I)}} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{(e^{(x\,I)})^2}\right)$$

```
> sol_part:=simplify(CC*y1+DD*y2);
```

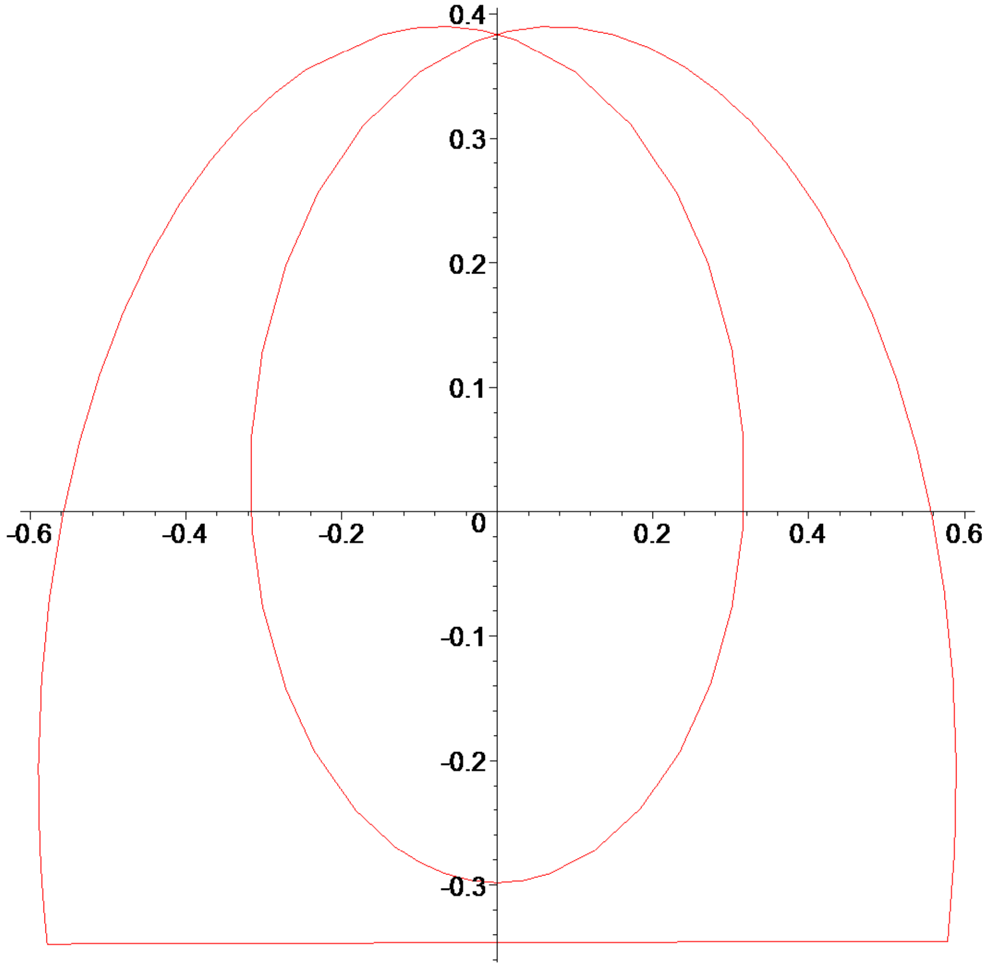
$$sol\_part := -\frac{1}{2}\,\mathrm{Ei}(1, e^{(x\,I)}\,I)\,e^{(-I\,(x - e^{(x\,I)}))}$$

```
> solE:=dsolve(E,y(x));v:=subs(solE,y(x));
```

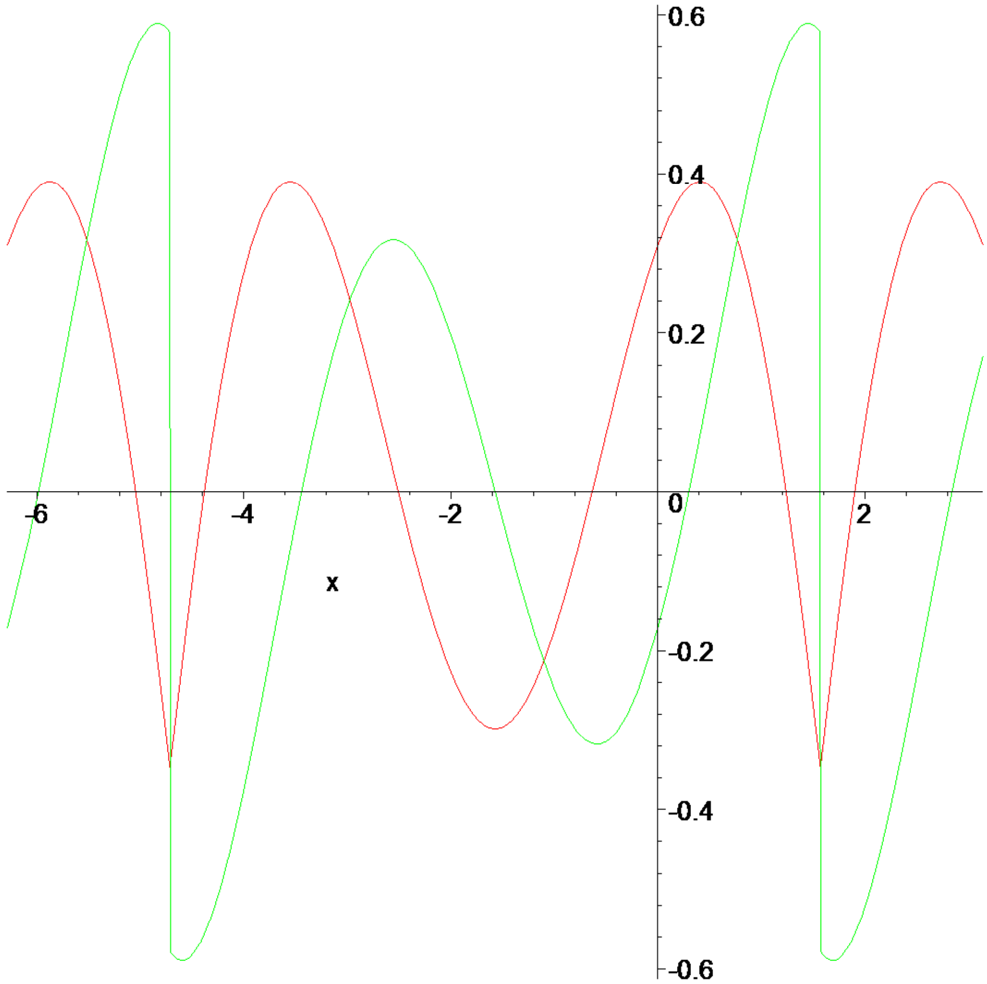
$$solE := y(x) = (1 - e^{(-I\,x)}\,I)\,\_C2 + e^{(-I\,(x - e^{(x\,I)}))}\,\_C1 - \frac{1}{2}\,\mathrm{Ei}(1, e^{(x\,I)}\,I)\,e^{(-I\,(x - e^{(x\,I)}))}$$

$$v := (1 - e^{(-I\,x)}\,I)\,\_C2 + e^{(-I\,(x - e^{(x\,I)}))}\,\_C1 - \frac{1}{2}\,\mathrm{Ei}(1, e^{(x\,I)}\,I)\,e^{(-I\,(x - e^{(x\,I)}))}$$

```
> with(plots):
> complexplot(sol_part,x=-Pi..Pi);
```




```
> plot([Re(sol_part),Im(sol_part)],x=-2*Pi..Pi,color=[green,red]);
```




```
> evalf(Pi/1.56);evalf(Pi/4.76);
```

2.013841445

0.6599984567

Il y a un pb en Pi/2, 3Pi/2.

```
>
```