Soit $y > 0$ fixé, $I = J = \mathbb{R}$ et $f := (x,u) \mapsto P(x-u,y)F(u)$.
$\forall u \in I,\ f(.,u) \in \mathcal{C}^2(J)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,u) = D_1P(x-u,y)F(u),\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,u) = D_1^2P(x-u,y)F(u)$.
$\forall x \in J,\ f(x,.),\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,.)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,.)$ sont $CM(I)$.
Dominations :
Soit $y > 0, u \in \mathbb{R}$ fixés et $g = x \mapsto P(x-u,y) = \dfrac{y}{\pi((x-u)^2+y^2)}$. g et ses dérivées première et seconde sont continues sur $\mathbb{R}$ et ont des limites en $\pm\infty$ (nulles) donc ces 3 fonctions sont bornées sur $\mathbb{R}$.
Pour $k = 0,1,2$, on a donc $\forall (x,u) \in I \times J,\ |\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,u)| \leq M_k|F(u)| = \varphi_k(u)$ et φ_k est un chapeau intégrable sur I.
On a ainsi prouvé que $G \in \mathcal{C}^2(J)$ et que les dérivées se calculent par formule de Leibnitz :
$\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = G'(x) = \displaystyle\int_I \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,u)\ \mathrm{d}u$ et $\dfrac{\partial^2 Q}{\partial x^2}(x,y) = G''(x) = \displaystyle\int_I \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,u)\ \mathrm{d}u$.
Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, $I = \mathbb{R},\ J = \mathbb{R}_+^*$ et $h := (y,u) \mapsto P(x-u,y)F(u)$, les preuves de régularité sont identiques, mais on ne peut trouver que des dominations locales ($x-u$ peut s'annuler) :
Pour tout $a > 0$, $y \mapsto \dfrac{y}{\pi((x-u)^2+y^2)}$ et ses dérivées première et seconde sont continues sur $[a,+\infty[$ et ont des limites en $+\infty$ (nulles) donc ces 3 fonctions sont bornées sur $[a,+\infty[$.
On a donc aussi $\dfrac{\partial^2 Q}{\partial y^2}(x,y) = \displaystyle\int_I \dfrac{\partial^2 h}{\partial y^2}(y,u)\ \mathrm{d}u$.
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,u) + \dfrac{\partial^2 h}{\partial y^2}(y,u) = D_1^2P(x-u,y)F(u) + D_2^2P(x-u,y)F(u) = 0$ puisque $\Delta P = 0$ donc $\Delta Q = 0$.
Soit $x \in R$ fixé. $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_I P(x-u,y)\ \mathrm{d}y = 1$ donc $\forall y > 0,\ Q(x,y) - F(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_I P(x-u,y)(F(u)-F(x))\ \mathrm{d}u$.
$t \mapsto u = x + ty$ est un $\mathcal{C}^1$ difféo de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ donc :
$\forall y > 0,\ Q(x,y) - F(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_I P(ty,y)(F(x+ty)-F(x))(y\ \mathrm{d}t) = \displaystyle\int_I \dfrac{F(x+ty)-F(x)}{1+t^2}\ \mathrm{d}t$.
Soit (y_n) une suite quelconque de $(\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ de limite 0 et $u_n(t) = \dfrac{F(x+ty_n)-F(x)}{1+t^2}$.
(u_n) CV simplement sur $\mathbb{R}$ de limite $l = 0 \in CM(\mathbb{R})$.
Domination : $\forall (t,n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N},\ |u_n(t)| \leq \dfrac{2M}{1+t^2} = \varphi(t)$ et $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$.
D'après le thm de CV dominée, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}} u_n = \int_{\mathbb{R}} l = 0$, donc par caractérisation séquentielle, $\displaystyle\lim_{y\to 0}(Q(x,y)-F(x)) = 0$.

O17-C022

```
> restart;
> P:=y/Pi/(x^2+y^2);
```

$$P := \frac{y}{\pi\,(x^2+y^2)}$$

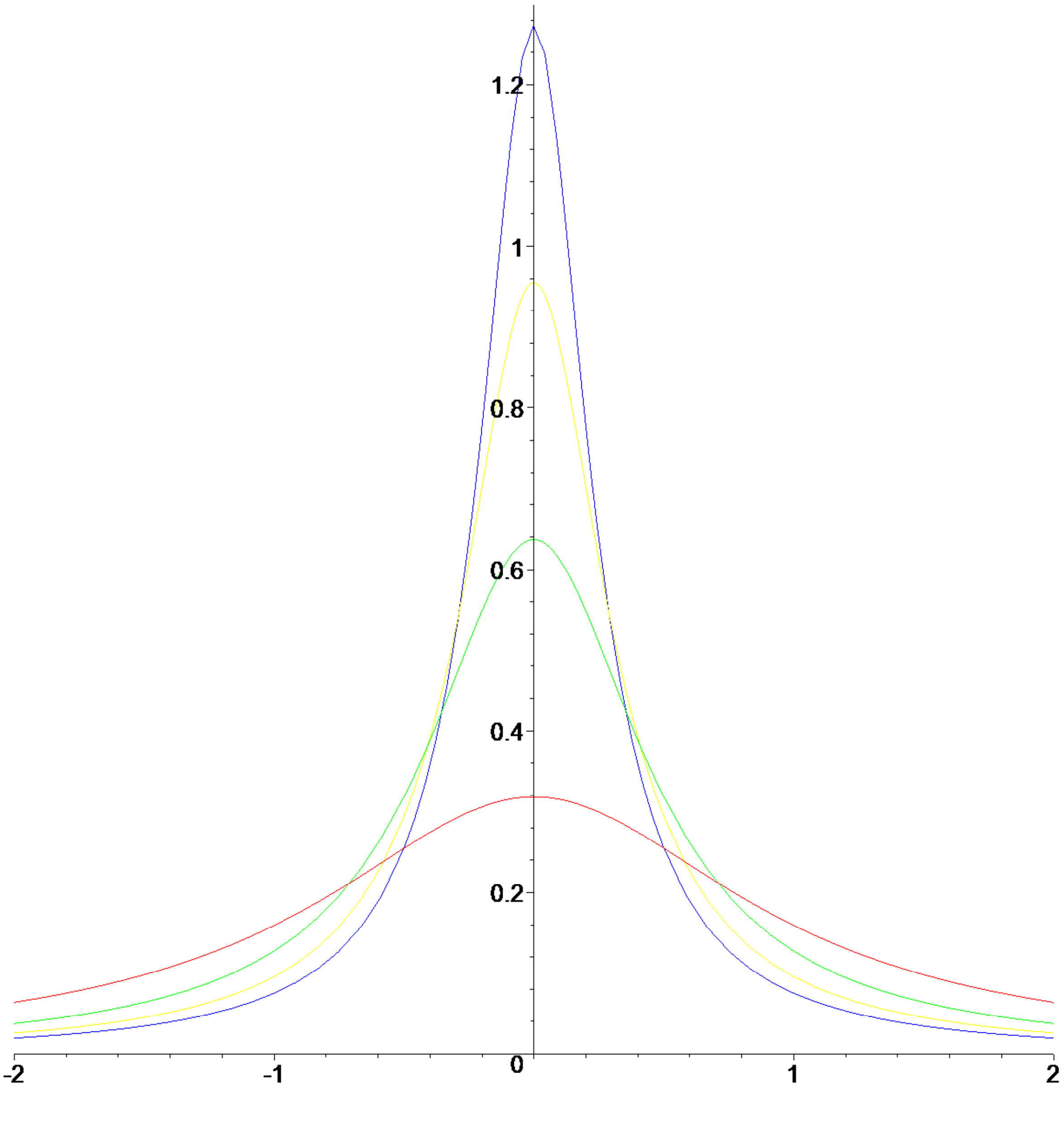
```
> simplify(diff(P,x$2)+diff(P,y$2));
```

$$0$$

```
> l:=[seq(subs(y=1/n,P),n=1..4)];
```

$$l := \left[\frac{1}{\pi\,(x^2+1)}, \frac{1}{2\,\pi\left(x^2+\frac{1}{4}\right)}, \frac{1}{3\,\pi\left(x^2+\frac{1}{9}\right)}, \frac{1}{4\,\pi\left(x^2+\frac{1}{16}\right)}\right]$$

```
> plot(l,x=-2..2);
```




```
> f:=subs(x=x-u,P);
```

$$f := \frac{y}{\pi\,((x-u)^2 + y^2)}$$

```
> int(f,u=-infinity..infinity);
```

$$\frac{y\left(\left(\begin{cases} -\dfrac{\pi}{y} & y < 0 \\ 0 & y = 0 \\ \dfrac{\pi}{y} & 0 < y \end{cases}\right) + \left(\begin{cases} \begin{cases} \infty & x = \mathrm{RootOf}(\Im(\_Z)) \\ 0 & \mathit{otherwise} \end{cases} & y = 0 \\ 0 & \mathit{otherwise} \end{cases}\right)\right)}{\pi}$$

```
> int(f,u);
```

$$\frac{\arctan\left(\dfrac{2\,u - 2\,x}{2\,y}\right)}{\pi}$$

Pi

```
>
```