1. (E) s'écrit sous "forme résolue" : $y" = a(x)y' + b(x)y$ avec $a(x) = \dfrac{x}{1-x^2}$ et $b(x) = \dfrac{-1}{9(1-x^2)}$ si $x \neq -1$ et $x \neq 1$; et a, b sont continues sur les intervalles $I_1 =]-\infty, -1[$, $I_2 =]-1, 1[$, $I_3 =]1, +\infty[$. D'après le thm de Cauchy-Lipschitz-linéaire, l'ensemble des solutions de (E) sur chaque intervalle I_k est un espace vectoriel de dimension 2.
2. Toutes les solutions g de (E) sur I_2 vérifiant $g(0) = 1/2$ ont des limites en -1^+ et 1^- donc sont prolongeables dans $\mathcal{C}([-1, 1])$.
   g' a une limite en 1^- ssi $C1 = \sqrt{3}/6$ d'où une unique solution ($vraig$) sur I_2 admettant un prolongement dans $\mathcal{C}^1(]-1, 1])$; elle n'a pas de prolongement dans $\mathcal{C}^1([-1, 1])$ puisque $vraig'$ n'a pas de limite en -1^+.
3. La dérivée seconde ($vraigsec$) a une limite en 1^- donc c'est un prolongement dans $\mathcal{C}^2(]-1, 1])$.
4. $x \mapsto \sin\left(\dfrac{1}{3}\arcsin x + \dfrac{\pi}{6}\right)$ est la solution de $((E), g(0) = 1/2)$ correspondant à $C1 = \sqrt{3}/2$.

   La recherche de solution développable en série entière ($y(x) = \displaystyle\sum_0^{+\infty} a_n x^n$) de $((E), g(0) = 1/2, g'(0) = \sqrt{3}/6)$ conduit à $a_0 = 1/2, a_1 = \sqrt{3}/6$ et $\forall n \geq 0,\ a_{n+2} = \dfrac{9n^2 - 1}{9(n+2)(n+1)} a_n$.

O17-963

```
> restart;
> edo:=9*(1-x^2)*diff(y(x),x$2)-9*x*diff(y(x),x)+y(x);
```

$$edo := 9\,(1-x^2)\left(\frac{d^2}{dx^2}\,y(x)\right) - 9\,x\left(\frac{d}{dx}\,y(x)\right) + y(x)$$

```
> sol:=dsolve({edo,y(0)=1/2},y(x));
```

$$sol := y(x) = \_C1\,\sin\left(\frac{1}{3}\arcsin(x)\right) + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{1}{3}\arcsin(x)\right)$$

```
> g:=subs(sol,y(x));
```

$$g := \_C1\,\sin\left(\frac{1}{3}\arcsin(x)\right) + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{1}{3}\arcsin(x)\right)$$

```
> limit(g,x=1);limit(g,x=-1);
```

$$\frac{\_C1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$-\frac{\_C1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}$$

```
> gprim:=diff(g,x);
```

$$gprim := \frac{1}{3}\,\frac{\_C1\,\cos\left(\frac{1}{3}\arcsin(x)\right)}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{6}\,\frac{\sin\left(\frac{1}{3}\arcsin(x)\right)}{\sqrt{1-x^2}}$$

```
> l:=limit(gprim*sqrt(1-x),x=1);
```

$$l := \frac{\sqrt{2}\,\_C1\,\sqrt{3}}{12} - \frac{\sqrt{2}}{24}$$

```
> series(gprim,x=1,2);
```

$$\frac{-\frac{1}{12}\,I\,\_C1\,\sqrt{3}\,\sqrt{2} + \frac{1}{24}\,I\,\sqrt{2}}{\sqrt{x-1}} + \frac{\sqrt{3}}{36} + \frac{\_C1}{18} + \mathrm{O}(\sqrt{x-1}\,)$$

```
> cste:=solve(l,_C1);
```

$$cste := \frac{\sqrt{3}}{6}$$

```
> vraig:=subs(_C1=cste,g);
```

$$vraig := \frac{1}{6}\sqrt{3}\,\sin\left(\frac{1}{3}\arcsin(x)\right) + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{1}{3}\arcsin(x)\right)$$

```
> vraigprim:=diff(vraig,x);
```

$$vraigprim := \frac{1}{18}\,\frac{\sqrt{3}\,\cos\left(\frac{1}{3}\arcsin(x)\right)}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{6}\,\frac{\sin\left(\frac{1}{3}\arcsin(x)\right)}{\sqrt{1-x^2}}$$

```
> series(vraigprim,x=-1,2);
```

$$\frac{\sqrt{2}}{12\,\sqrt{x+1}} - \frac{\sqrt{3}}{54} + \mathrm{O}(\sqrt{x+1}\,)$$

```
> vraigsec:=diff(vraig,x$2);
```

$$vraigsec := -\frac{1}{54}\,\frac{\sqrt{3}\,\sin\left(\frac{1}{3}\arcsin(x)\right)}{1-x^2} + \frac{1}{18}\,\frac{\sqrt{3}\,\cos\left(\frac{1}{3}\arcsin(x)\right)x}{(1-x^2)^{(3/2)}} - \frac{1}{18}\,\frac{\cos\left(\frac{1}{3}\arcsin(x)\right)}{1-x^2} - \frac{1}{6}\,\frac{\sin\left(\frac{1}{3}\arcsin(x)\right)x}{(1-x^2)^{(3/2)}}$$

```
> series(vraigsec,x=1,4);
```

$$-\frac{8\sqrt{3}}{729} + \frac{56\sqrt{3}\,(x-1)}{6561} - \frac{320\sqrt{3}\,(x-1)^2}{59049} + \mathrm{O}((x-1)^{(5/2)})$$

```
>
```