a) Sans Maple :

Si $f = x \mapsto \exp(ipx), p \ \in \mathbb{Z}$, alors $A(n,f) = \dfrac{1}{n}\dfrac{\exp(ip)(1-\exp(inp))}{1-\exp(ip)} - 0$ (car $\exp(ip) \neq 1$) d'où la limite.

b) i) Thm de Stone-Weierstrass-II

ii) $|A(n,g) - A(n,f)| \leq \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |g(k) - f(k)| + \dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |g(t) - f(t)| \text{ d}t < \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \varepsilon + \dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varepsilon \text{ d}t = 2\varepsilon.$

iii) $f \mapsto A(n,f)$ est linéaire et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} A(n,f) = 0$ pour toute fonction $f = x \mapsto \exp(ipx), p \ \in \mathbb{Z}$ donc par combinaison linéaire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} A(n,P) = 0$ pour tout P polynôme trigonométrique.

iv) Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et P introduit au i).
$|A(n,g)| \leq |A(n,g) - A(n,P)| + |A(n,P)|$ et $\exists N_0,\ \forall n \geq N_0,\ |A(n,P)| \leq \varepsilon$ d'après iii) d'où :

$$\forall n \geq N_0,\ |A(n,g)| < 2\varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon.$$

O17-962

```
> restart;
> A:=(n,f)->(sum(f(k),k=1..n))/n-(int(f(t),t=0..2*Pi))/2/Pi;
```

$$A := (n, f) \to \frac{\sum_{k=1}^{n} f(k)}{n} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\, dt\right)$$

```
> f:=x->sin(3*x):A(n,f);
```

$$\left(-2\sin(n+1)\cos(n+1)^2 - \frac{3}{2}\frac{\sin(1)(2\cos(1)-1)\cos(n+1)}{2\cos(1)^2-\cos(1)-1} + \frac{1}{2}\sin(n+1) + \frac{2\sin(1)(2\cos(1)-1)\cos(n+1)^3}{2\cos(1)^2-\cos(1)-1} + 2\sin(1)\cos(1)^2 + \frac{3}{2}\frac{\sin(1)(2\cos(1)-1)\cos(1)}{2\cos(1)^2-\cos(1)-1} - \frac{1}{2}\sin(1) - \frac{2\sin(1)(2\cos(1)-1)\cos(1)^3}{2\cos(1)^2-\cos(1)-1}\right) / n$$

```
> g:=x->exp(I*p*x):assume(p,integer):Ag:=A(n,g);
```

$$Ag := \frac{\dfrac{e^{(p\sim(n+1)I)}}{(-1)^{\left(\frac{p\sim}{\pi}\right)}-1} - \dfrac{e^{(p\sim I)}}{(-1)^{\left(\frac{p\sim}{\pi}\right)}-1}}{n}$$

```
> limit(Ag,n=infinity);
```

$$0$$

```
>
```