1. On peut conjecturer que $\alpha_{n+1} - (n+1)\alpha_n = (-1)^{n+1}$, ce que confirme le calcul direct.

2. $\sum \dfrac{(-1)^n}{n!}$ est alternée à module décroissant vers 0 donc $0 \leq R_{2p} \leq \dfrac{1}{(2p+1)!}$ si R_{2p} est le reste d'ordre $2p$ ie $R_{2p} = 1/e - \alpha_{2p}/(2p)!$.
   On isole α_{2p} dans l'encadrement de R_{2p} : $(2p)!e^{-1} - \dfrac{1}{2p+1} \leq \alpha_{2p} \leq (2p)!e^{-1}$ et $\dfrac{1}{2p+1} < 1/2$ donc α_{2p} est l'entier le plus proche de $(2p)!e^{-1}$. On fait de même pour les nombres impairs.
   Conclusion : α_n est l'entier le plus proche de $(n)!e^{-1}$.
3. Formule de Leibnitz : $(1-x)y^{(n+1)}(x) - ny^{(n)}(x) = xy^{(n)}(x) + ny^{(n-1)}(x)$.
   En 0 : $y^{(n+1)}(0) - ny^{(n)}(0) = ny^{(n-1)}(0)$ donc
   $y^{(n+1)}(0) - (n+1)y^{(n)}(0) = -(y^{(n)}(0) - ny^{(n-1)}(0)) = ... = (-1)^n(y^{(1)}(0) - y(0)) = (-1)^{n+1}$.
   (α_n) et $y^{(n)}(0)$ vérifient une même relation de récurrence à 2 prédécesseurs et $(\alpha_0, \alpha_1) = (y(0), y^{(1)}(0))$ d'où l'égalité.
4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\alpha_k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} y^{(k)}(0)\exp^{(n-k)}(0) = (y.\exp)^{(n)}(0)$, (Leibnitz) et $y(x).\exp(x) = \dfrac{1}{1-x}$, $(y.\exp)^{(n)}(x) = \dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$
   donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\alpha_k = n!$.

O17-960

```
> restart:
> alfa:=n->n!*sum((-1)^k/(k!),k=0..n);
```

$$alfa := n \to n!\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}\right)$$

```
> seq(alfa(n),n=1..10);
```

$$0, 1, 2, 9, 44, 265, 1854, 14833, 133496, 1334961$$

```
> seq(alfa(n+1)-(n+1)*alfa(n),n=1..10);
```

$$1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1$$

```
>
> ediff:=(1-x)*diff(y(x),x)-x*y(x);
```

$$ediff := (1-x)\left(\frac{d}{dx}\,y(x)\right) - x\,y(x)$$

```
> resol:=dsolve({ediff,y(0)=1},y(x));
```

$$resol := y(x) = -\frac{\mathbf{e}^{(-x)}}{-1+x}$$

```
> f:=subs(resol,y(x));g:=unapply(f,x);
```

$$f := -\frac{\mathbf{e}^{(-x)}}{-1+x}$$

$$g := x \to -\frac{\mathbf{e}^{(-x)}}{-1+x}$$

```
> seq(((D@@n)(g))(0),n=1..10);
```

$$0, 1, 2, 9, 44, 265, 1854, 14833, 133496, 1334961$$

```
>
>
```