1. Soit $[-a,a]$ segment centré de $]-1,1[$ de $u_n(x)=\dfrac{x^n}{1+x^{2n}}$.
   $\|u_n\|_\infty^{[-a,a]}\leq a^n$ donc $\sum u_n$ CVN sur tout compact de $]-1,1[$ et est à termes continus donc la somme est continue sur $]-1,1[$.
2. $\forall n,\ u_n(1/x)=u_n(x)$ donc $\sum u_n$ converge aussi sur $]-\infty,-1[$ et $]1,+\infty[$, $f(1/x)=f(x)$ et f est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$. De plus $\sum u_n(\pm 1)$ est divergente, donc il s'agit du domaine de définition.
3. Il semblerait que f admette une limite en -1 et tende vers $+\infty$ en $+1$.
4. On prend $x\in]0,1[$.
   $u_n(x)=\dfrac{1}{2\operatorname{ch}(-n\ln x)}$ donc $\displaystyle\int_n^{n+1}\frac{\mathrm{d}t}{2\operatorname{ch}(-t\ln x)}\leq u_n(x)\leq\int_{n-1}^{n}\frac{\mathrm{d}t}{2\operatorname{ch}(-t\ln x)}$, la 2ème inégalité seulement à partir de $n=1$.
   $t\mapsto\dfrac{2}{\operatorname{ch}(-t\ln x)}\underset{t\to+\infty}{\sim}\exp(-t\ln x)$ est $L^1([0,+\infty[)$ donc on somme :
   $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{2\operatorname{ch}(-t\ln x)}\leq f(x)\leq 1/2+\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{2\operatorname{ch}(-t\ln x)}$.
   $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{\operatorname{ch}(\alpha t)}=\int_0^{+\infty}\frac{e^{\alpha t}\,\mathrm{d}t}{1+(e^{\alpha t})^2}=[\frac{1}{\alpha}\arctan(e^{\alpha t})]_0^{+\infty}=\frac{\pi}{4\alpha}$ pour $\alpha>0$ d'où l'encadrement demandé.
   On divise par $-\pi/(4\ln x)$ et par gendarmes $f(x)\underset{x\to1^-}{\sim}\dfrac{-\pi}{4\ln x}$.
   Si $x>1$, $f(x)=f(1/x)\underset{x\to1^-}{\sim}\dfrac{-\pi}{4\ln(1/x)}=\dfrac{\pi}{4\ln x}$.
5. Ici $-1<x<0$.
   Les deux "sous-séries" étant convergentes, on regroupe les indices pairs et les indices impairs et :
   $f(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}v_k(x)$ où $v_k(x)=\dfrac{x^{2k}}{1+x^{4k}}+\dfrac{x^{2k+1}}{1+x^{4k+2}}$ et $\dfrac{x^{2k+1}}{1+x^{4k+2}}=-\dfrac{|x|^{2k+1}}{1+x^{4k+2}}$.
   $\sum v_k(x)$ est ATP (car $t\mapsto\dfrac{t}{1+t^2}$ décroit sur $[0,1]$ et $0\leq|x|^{2k+1}\leq x^{2k}$) donc f est minorée 0 et $\sum v_k(-1)$ est convergente (TG nul) donc $g(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}v_k(x)$ est défini pour $x\in[-1,0]$ et coïncide avec $f(x)$ si $x\in]-1,0]$.
   L'expérimentation Maple suggère que g n'est pas continue en -1 et que $\lim\limits_{-1^+}g=\lim\limits_{-1^+}f=0.25$.
   La relation $f(1/x)=f(x)$ dit qu'alors, on aura aussi $\lim\limits_{-1^-}f=0.25$.
   $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\},\ f(x)-2f(x^2)=\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}w_k(x)$ où $w_k(x)=v_k(x)-2\dfrac{x^{2k}}{1+x^{4k}}=-v_k(-x)$.
   On a donc $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\},\ -f(x)+2f(x^2)=f(-x)$ et on cherche $\lim\limits_{x\to1^+}2f(x^2)-f(x)$.
   Hélas $f(x)\underset{x\to1^+}{\sim}\dfrac{\pi}{4\ln x}$ donc $f(x^2)\underset{x\to1^+}{\sim}\dfrac{\pi}{8\ln x}$ donc il faut un développement asymptotique plus précis.
   Soit $h=u\mapsto\displaystyle\int_0^u\frac{\mathrm{d}t}{2\operatorname{ch}(t\ln x)}$. $h\in\mathcal{C}^3(\mathbb{R})$: on applique une formule de Taylor.
   Soit $n\in\mathbb{N}$. $h(n-1/2)=h(n)-1/2h'(n)+1/8h''(n)+R_n(-1/2)$ et $h(n+1/2)=h(n)+1/2h'(n)+1/8h''(n)+R_n(1/2)$ donc, en faisant la différence, $\displaystyle\int_{n-1/2}^{n+1/2}\frac{\mathrm{d}t}{2\operatorname{ch}(t\ln x)}=h'(n)+R_n(1/2)-R_n(-1/2)$.
   $\forall n,\ u_n(x)=h'(n)=\displaystyle\int_{n-1/2}^{n+1/2}\frac{\mathrm{d}t}{2\operatorname{ch}(t\ln x)}-R_n(1/2)+R_n(-1/2)$ donc $f(x)=\displaystyle\int_{-1/2}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{2\operatorname{ch}(t\ln x)}-\sum_{n=0}^{+\infty}(R_n(1/2)-R_n(-1/2))$.
   $\displaystyle\int_{-1/2}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{2\operatorname{ch}(t\ln x)}=\frac{1}{\ln x}(\pi/2-\arctan(\exp(-\frac{\ln x}{2}))$, $\exp(-\dfrac{\ln x}{2})=_{x\to1^+}1-\dfrac{x-1}{2}+o(x-1)$ et $\arctan(1+t)=_{t\to0}\pi/4+\dfrac{t}{2}+o(t)$
   donc $\displaystyle\int_{-1/2}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{2\operatorname{ch}(t\ln x)}=\frac{1}{\ln x}(\pi/4+\frac{x-1}{4}+o(x-1))=_{x\to1^+}\frac{\pi}{4\ln x}+\frac{1}{4}+o(1)$.
   $|R_n(1/2)|\leq\dfrac{(1/2)^3}{3!}M_3(1/2)$ où $M_3(1/2)$ majore $|h'''|$ sur $[n,n+1/2]$.

$h'''(u) = \dfrac{(\ln x)^2}{2}\left(\dfrac{1}{\mathrm{ch}(u\ln x)} - \dfrac{2}{\mathrm{ch}^3(u\ln x)}\right)$ donc $|h'''(u)| \leq \dfrac{(\ln x)^2}{2}\left(\dfrac{3}{\mathrm{ch}(u\ln x)}\right)$.

$\forall n \geq 0,\ |R_n(1/2)| \leq \dfrac{(1/2)^3}{3!}\dfrac{(\ln x)^2}{2}\left(\dfrac{3}{\mathrm{ch}(n\ln x)}\right) = \dfrac{(\ln x)^2 u_n(x)}{16}$

De même $\forall n \geq 1,\ |R_n(-1/2)| \leq \dfrac{(1/2)^3}{3!}\dfrac{(\ln x)^2}{2}\left(\dfrac{3}{\mathrm{ch}((n-1)\ln x)}\right) = \dfrac{(\ln x)^2 u_{n-1}(x)}{16}$ et $|R_0(-1/2)| \leq \dfrac{(\ln x)^2)}{32}$

On a donc $|\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(R_n(1/2) - R_n(-1/2))| \leq \dfrac{(\ln x)^2(4f(x)+1)}{32} \underset{x\to 1^+}{\sim} \dfrac{\pi \ln x}{32} =_{x\to 1^+} o(1)$,

et $f(x) =_{x\to 1^+} \dfrac{\pi}{4\ln x} + \dfrac{1}{4} + o(1)$.

$2f(x^2) - f(x) =_{x\to 1^+} \dfrac{2\pi}{4\ln x^2} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{\pi}{4\ln x} - \dfrac{1}{4} + o(1) \to 1/4$ ce qui confirme l'impression Maple.