1. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé et $h = t \neq 0 \mapsto \dfrac{\sin(xt)}{e^t - 1}$, $h(0) = x$.
   h est continue sur $\mathbb{R}$ et $h(t) = O_{t\to+\infty}(e^{-t})$ donc $h \in L^1([0, +\infty[)$.
   L'ensemble de définition de f est donc $J = \mathbb{R}$.

2. Soit (Π_k) : "$f \in \mathcal{C}^k(J)$ et $D^k f = x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} t^k \frac{\sin(xt + k\pi/2)}{e^t - 1}\,\mathrm{d}t$".
   (Π_0) et $(\Pi_k)_{k\geq 0}$ est héréditaire (domination par $\varphi_{k+1} = \left(t \mapsto t^k \dfrac{1}{e^t - 1}\right) \in L^1(]0, +\infty[)$)

3. On peut penser que $\lim\limits_{\infty} f = \pi/2 \quad (1)$.
   $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin xt}{e^t} \frac{1}{1 - e^{-t}}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ où $u_n = (t \mapsto \sin(xt)\, e^{-(n+1)t})$.
   Soit $R_n = \displaystyle\sum_{k\geq n+1} u_k$. $\left|\displaystyle\int_0^{+\infty} R_n\right| = \left|\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin xt}{e^t} \frac{e^{-(n+1)t}}{1 - e^{-t}}\,\mathrm{d}t\right| = \left|\displaystyle\int_0^{+\infty} h(t) e^{-(n+1)t}\right|$.
   h est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$ et a des limites en $\pm\infty$ donc est bornée : $\left|\displaystyle\int_0^{+\infty} R_n\right| \leq \dfrac{K}{n+1} \to_{n\to+\infty} 0$.
   On en déduit $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\frac{e^{ixt-(n+1)t}}{ix - (n+1)}\right]_0^{+\infty} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x}{x^2 + (n+1)^2}$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$ fixé, $k = t \mapsto \dfrac{x}{x^2 + t^2}$ est décroissante donc $\forall n \geq 0$, $\displaystyle\int_n^{n+1} k \leq k(n) \leq \int_{n-1}^{n} k$ et
   $\pi/2 - \arctan 1/x = \displaystyle\int_1^{+\infty} k \leq f(x) \leq \int_0^{+\infty} k = \pi/2$ ce qui confirme (1).

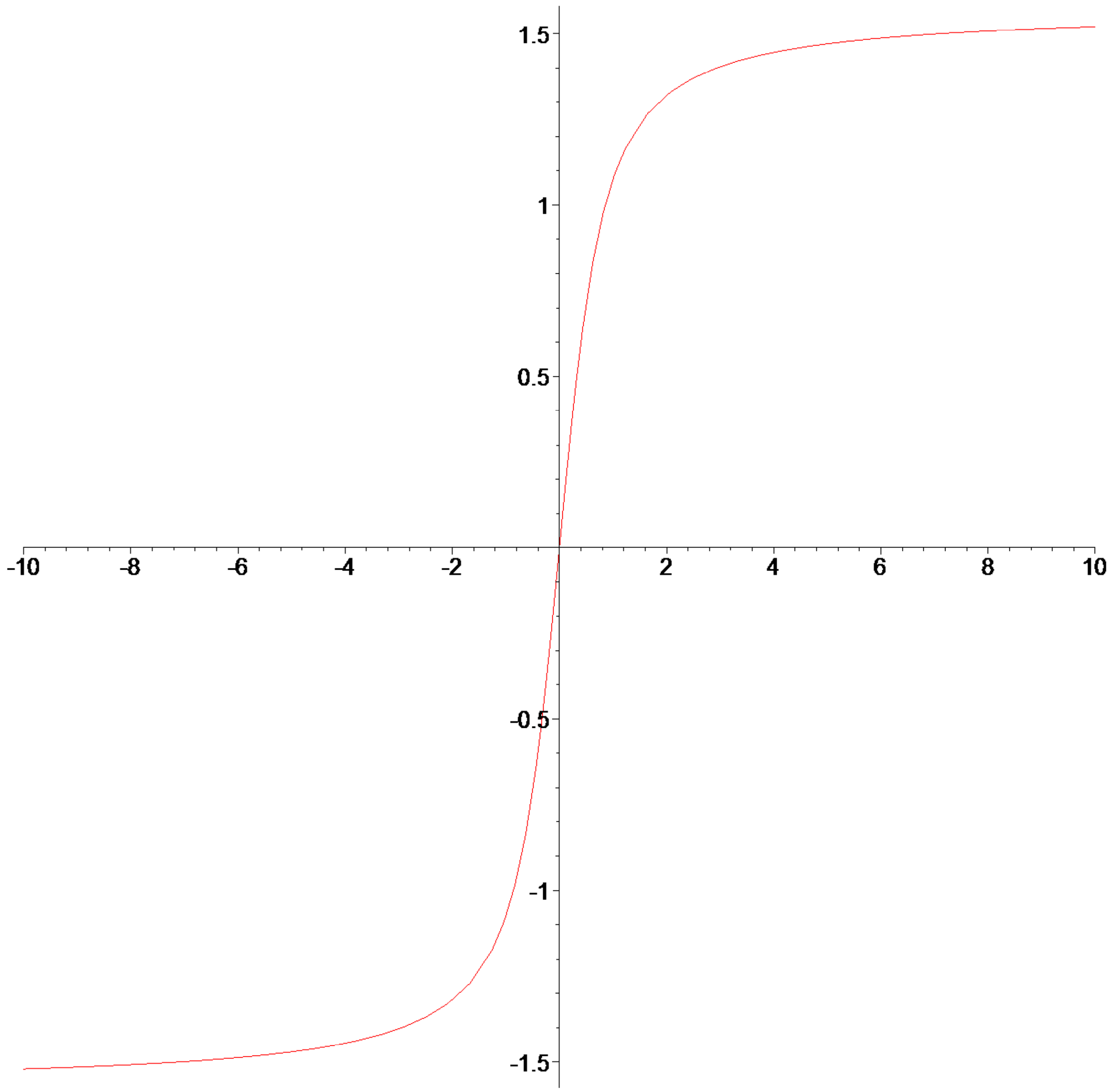
4. g est $\mathcal{C}^1$ par morceaux et continue sur $\mathbb{R}$ donc $\forall t \in \mathbb{R}$, $g(t) = \displaystyle\sum_{\mathbb{Z}} c_n(g) e^{int} = \frac{x \operatorname{sh} \pi x}{\pi} \sum_{\mathbb{Z}} \frac{(-1)^n e^{int}}{x^2 + n^2}$.
   Pour $t = \pi$, il vient $\operatorname{ch} \pi x = \dfrac{x \operatorname{sh} \pi x}{\pi} \left(\dfrac{1}{x^2} + 2 \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + n^2}\right)$ ce qui donne $f(x) = \dfrac{\pi}{2}\left(\coth x - \dfrac{1}{\pi x}\right)$.

O17-085

```
> restart;
> f:=x->int(sin(x*t)/(exp(t)-1),t=0..infinity);
```

$$f := x \to \int_0^\infty \frac{\sin(x\,t)}{\mathbf{e}^t - 1}\,dt$$

```
> plot(f,-10..10);
```




```
> g:=cosh(t*x);
```

$$g := \cosh(t\,x)$$

```
> c:=n->int(g*exp(-I*n*t),t=-Pi..Pi)/2/Pi;
```

$$c := n \to \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g\,\mathbf{e}^{(-I\,n\,t)}\,dt\right)$$

```
> assume(n,integer);factor(c(n)*exp(I*n*Pi));
```

$$\frac{1}{2}\,\frac{x\,(\mathbf{e}^{(2\,x\,\pi)}-1)\,\mathbf{e}^{(-x\,\pi)}\,((-1)^{n\sim})^2}{(x^2+n\sim^2)\,\pi}$$

g~(Pi)=2*(sinh(x*Pi)/Pi)*f(x)+c(0)=cosh(Pi*x)