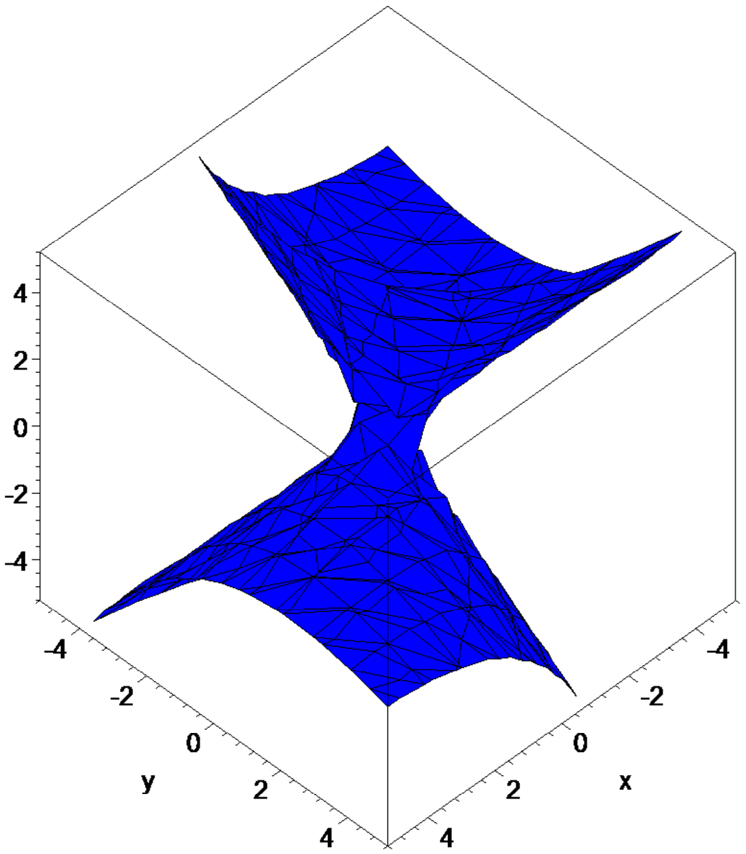
1. Méthode "cultivée" (décomposition en carrés par la méthode de Gauss) :
   On "canonise" par rapport à a :
   $K = a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = a^2 - a(b+c) + ... = (a - \frac{1}{2}(b+c))^2 + (\frac{3}{4}b^2 + \frac{3}{4}c^2 - \frac{3}{2}bc)$,
   et on recommence par rapport à b ce qui donne $K = (a - \frac{1}{2}(b+c))^2 + \frac{3}{4}(b-c)^2$, d'où le signe et $K = 0 \iff a = b = c$.
   Méthode "intuitive" :
   On "remarque" : $2K = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$ etc...
2. Si $a = b = c (\neq 0)$, alors la surface S est un plan (double) $x + y + z = cste$.
   Sinon, $sp(A) = \{a+b+c, \omega, -\omega\}$ où $\omega^2 = K \neq 0$ et $\omega(y1^2 - z1^2) + (a+b+c)x1^2 = 1$ est une équation réduite en ROND d'où 3 cas :
   Si $a+b+c = 0$, S est un cylindre hyperbolique, si $a+b+c > 0$, c'est un hyperboloïde à une nappe, si $a+b+c < 0$, c'est un hyperboloïde à deux nappes.
3. S est de révolution ssi c'est un hyperboloïde de révolution, à une nappe ssi $\omega = a+b+c$, à deux nappes ssi $\omega = -(a+b+c)$.
   Un hyperboloïde de révolution est engendré par une droite ssi il est à une nappe : on a donc désormais $\omega = a+b+c$ soit $K = (a+b+c)^2$ et $a+b+c > 0$ d'où deux solutions : $b = c = 0$ et $a > 0$ ou bien $a = -\frac{cb}{c+b}$ et $c+b > 0$.
   Dans tous les cas, une équation réduite est : $\omega(-X^2 + Y^2 + Z^2) = 1$.
   L'axe Δ est OX.
   Une directrice D se trouve à partir de $\omega(-X+Z)(X+Z) = (1-kY)(1+kY)$ avec $k = \sqrt{\omega}$.
   On peut choisir $(X = Z,\ Y = 1/k)$ qui passe par $(0, 1/k, 0)$ et est dirigée par $(1, 0, 1)$.
   Δ est la droite qui passe par $(-5, 0, 0)$ et $(5, 0, 0)$ et D est paramétrée par $(X = t; Y = 1/k; Z = t)$.

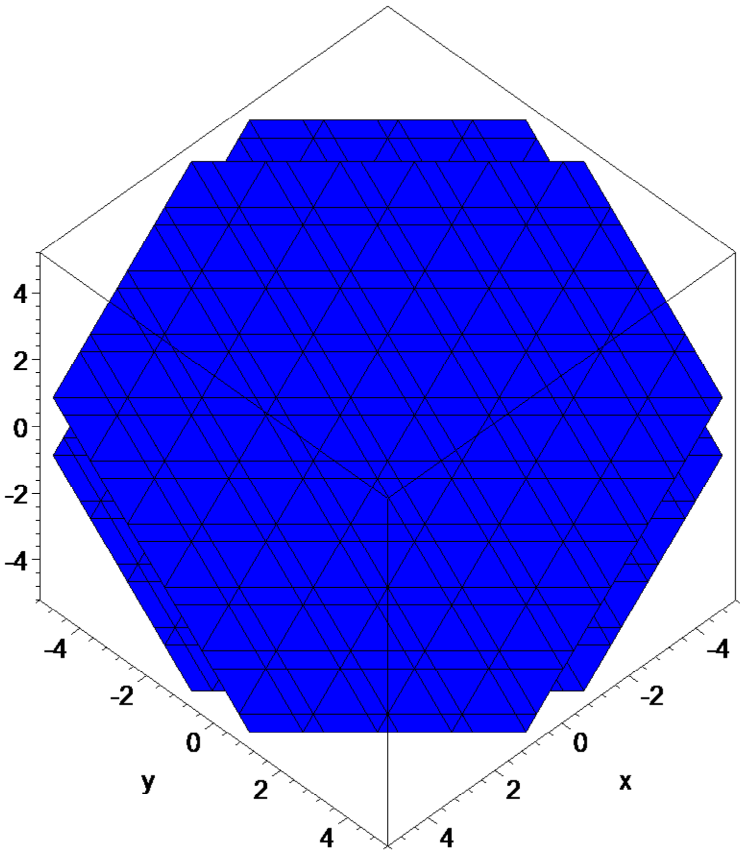
```
> restart;
> q:=(a,b,c)->a*(x^2+2*y*z)+b*(y^2+2*x*z)+c*(z^2+2*x*y)=1;
```

$$q := (a, b, c) \to a\,(x^2 + 2\,y\,z) + b\,(y^2 + 2\,x\,z) + c\,(z^2 + 2\,x\,y) = 1$$

```
> with(plots):
Warning, the name changecoords has been redefined
> implicitplot3d(q(1,2,-2/3), x=-5..5, y=-5..5, z=-5..5, color=blue,
  scaling=constrained, axes=boxed);
```




```
> implicitplot3d(q(1,1,1), x=-5..5, y=-5..5, z=-5..5, color=blue, scaling=constrained,
  axes=boxed);
```




```
> with(LinearAlgebra):
> mq:=Matrix([[a,c,b],[c,b,a],[b,a,c]]);
```

$$mq := \begin{bmatrix} a & c & b \\ c & b & a \\ b & a & c \end{bmatrix}$$

```
> mq1:=subs({b=a,c=a},mq);
```

$$mq1 := \begin{bmatrix} a & a & a \\ a & a & a \\ a & a & a \end{bmatrix}$$

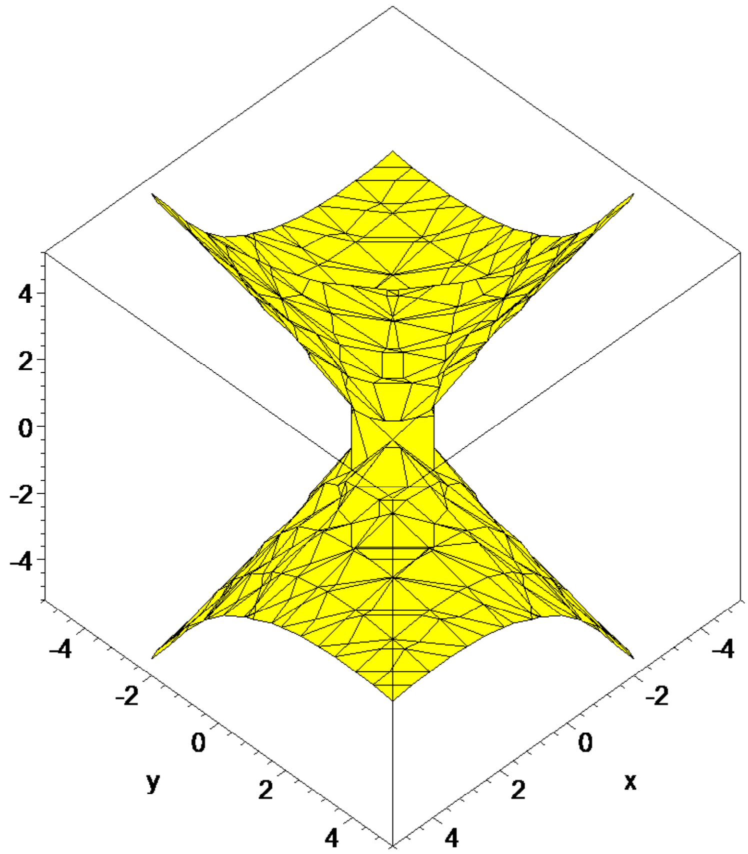
```
> Eigenvalues(mq1);
```

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3\,a \end{bmatrix}$$

```
> vp:=Eigenvalues(mq);
```

$$vp := \begin{bmatrix} c+b+a \\ \sqrt{b^2+a^2-c\,b-c\,a+c^2-b\,a} \\ -\sqrt{b^2+a^2-c\,b-c\,a+c^2-b\,a} \end{bmatrix}$$

```
> implicitplot3d(q(1,1,-1/2), x=-5..5, y=-5..5, z=-5..5, color=yellow,
  scaling=constrained, axes=boxed);
```




```
> l1l2:=[solve(vp[1]=vp[2])];
```

$$l1l2 := \left[\left\{ a = -\frac{c\,b}{c+b}, c = c, b = b \right\}, \{ c = 0, b = 0, a = a \} \right]$$

```
> l1l3:=[solve(vp[1]=vp[3])];
```

$$l1l3 := \left[\left\{ a = -\frac{c\,b}{c+b}, c = c, b = b \right\}, \{ c = 0, b = 0, a = a \} \right]$$

```
> mqr:=subs(l1l2[1],mq);
```

$$mqr := \begin{bmatrix} -\frac{c\,b}{c+b} & c & b \\ c & b & -\frac{c\,b}{c+b} \\ b & -\frac{c\,b}{c+b} & c \end{bmatrix}$$

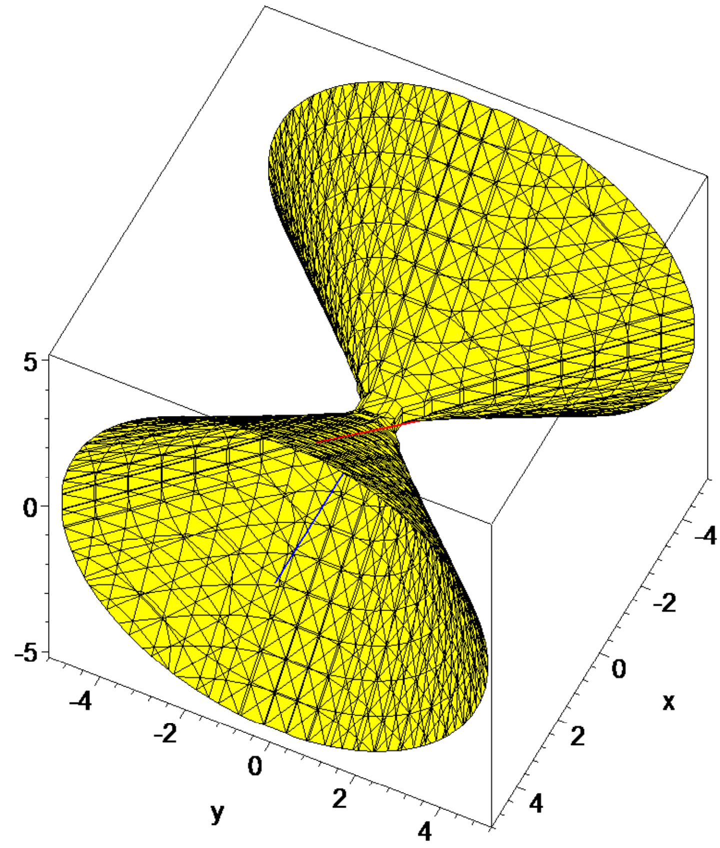
```
> Eigenvalues(mqr);
```

$$\begin{bmatrix} -\frac{c^2+c\,b+b^2}{c+b} \\ \frac{c^2+c\,b+b^2}{c+b} \\ \frac{c^2+c\,b+b^2}{c+b} \end{bmatrix}$$

```
> k:=2;
axe:=spacecurve([[-5,0,0],[5,0,0]],color=blue,thickness=2):
droite:=spacecurve([t,1/k,t],t=-4..4,color=red,thickness=2):
```

$$k := 2$$

```
> surf:=implicitplot3d(k^2*(-x^2+y^2+z^2)=1, x=-5..5, y=-5..5, z=-5..5,
color=yellow,grid=[20,20,20], scaling=constrained, axes=boxed):
> display3d([surf,droite,axe]);
```


5
0
-5
-4
-2
0
2
4
y
-4
-2
0
2
4
x

>