1. Soit $D = diag(a_{1,1}, ..., a_{n,n})$ et B est considéré comme une matrice colonne.
   $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $a_{i,i} y_i^{(m+1)} = b_i - \sum_{j \neq i} a_{i,j} y_j^{(m)}$ traduit $DY_{m+1} = B - (A - D)Y_m$.
   Supposons que (Y_m) a une limite, L. Par continuité des applications $T \in \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{K}) \mapsto DT$ et $T \in \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{K}) \mapsto AT$, on a $DL = B - (A - D)L$ ie $AL = B$.
2. Une condition nécessaire pour que (Y_m) ait une limite est que $AX = B$ admette au moins une solution ($B \in Im(A)$). On suppose désormais cette condition satisfaite et soit X_0 une solution.
   $\forall m \in \mathbb{N},\ Y_{m+1} - X_0 = D^{-1}\big(B - (A - D)Y_m\big) - X_0 = (I_n - D^{-1}A)Y_m + D^{-1}AX_0 - X_0 = K(Y_m - X_0)$ en notant $K = I_n - D^{-1}A$, donc $\forall m \in \mathbb{N},\ Y_m - X_0 = K^m(U - X_0)$.
   - Première lecture du texte : Pour tout U, la suite (Y_m) converge vers une <u>même</u> limite.
     Cette limite L est une solution du système. On choisit $X_0 = L$.
     Condition nécessaire : Pour tout $U = X_0 + V$ où V est vecteur propre de K, il faut que $\lim(Y_m - X_0) = 0$.
     Soit λ la valeur propre associée à V. $\forall m \in \mathbb{N},\ Y_m - X_0 = \lambda^m(U - X_0)$ donc il faut que $|\lambda| < 1$.
     Condition suffisante : Supposons $\rho(K) < 1$ (ie $sp(D^{-1}A) \subset B(1, 1)$: 0 n'est pas valeur propre de $D^{-1}A$, A est inversible et il existe un et un seul X_0 ; $B \in Im(A)$ est redondant).
     D'après un exo. classique, $\lim K^m = 0$.
     La CNS est donc : $sp(D^{-1}A) \subset B(1, 1)$.
   - Deuxième lecture du texte : Pour tout U, la suite (Y_m) converge vers <u>une</u> limite.
     Condition nécessaire : Pour tout $U = X_0 + V$ où V est un vecteur propre de K et X_0 une solution du système, il faut que $\lim(Y_m - X_0)$ existe.
     Soit λ la valeur propre associée à V. $\forall m \in \mathbb{N},\ Y_m - X_0 = \lambda^m(U - X_0)$ donc il faut que $|\lambda| < 1$ <u>ou bien $\lambda = 1$</u>.
     Supposons que $1 \in sp(K)$ et démontrons que $\mathrm{Ker}(K - I_n) = \mathrm{Ker}((K - I_n)^2)$:
     Sinon, il existe $W \in \mathrm{Ker}((K - I_n)^2)$ tel que $W \notin \mathrm{Ker}(K - I_n)$.
     Soit $V = (K - I_n)W$ (donc $KW = V + W$ et $K^mW = mV + W$) et $U = X_0 + W$.
     $\forall m \in \mathbb{N},\ Y_m - X_0 = K^mW = mV + W$ donc la suite (Y_m) n'a pas de limite, ce qui est absurde.
     Condition suffisante : Supposons $sp(K) \subset B(0, 1) \cup \{1\}$ et $\mathrm{Ker}(K - I_n) = \mathrm{Ker}((K - I_n)^2)$ (éventuellement nuls).
     Alors K est semblable à une matrice $K' = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & K" \end{pmatrix}$ ($K = PK'P^{-1}$) où p est l'ordre de la valeur propre 1 et $1 \notin sp(K")$, donc $\rho(K") < 1$. $\forall m \in \mathbb{N},\ K'^m = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & K"m \end{pmatrix} \to_{m \to +\infty} \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
     (Y_m) a une limite : $L = X_0 + P \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}(U - X_0) = X_0 + Z$.
     De plus $-D^{-1}AZ = (K - I_n)Y = P(K' - I_n) \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}(U - X_0) = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}(U - X_0) = 0$ ie $AZ = 0$: L est bien une autre solution du système $AY = B$.
     La CNS est donc : $B \subset Im(A)$ et $sp(D^{-1}A) \subset B(1, 1) \cup \{1\}$ et $\mathrm{Ker}(K - I_n) = \mathrm{Ker}((K - I_n)^2)$.
     Remarque : La condition $\mathrm{Ker}(K - I_n) = \mathrm{Ker}((K - I_n)^2)$ peut se traduire par $\dim E_1 = ordre(1)$ ($E_1 = \mathrm{Ker}(K - I_n)$)

O16-C054

```
> restart;
> with(LinearAlgebra):
> a:=Matrix(4,4,[-12,2,3,4,2,13,4,5,3,4,15,5,4,5,6,-17]);Determinant(a);
```

$$a := \begin{bmatrix} -12 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 13 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 15 & 5 \\ 4 & 5 & 6 & -17 \end{bmatrix}$$

$$44484$$

```
> d:=Matrix(4,4,Vector([seq(a[i,i],i=1..4)]),shape=diagonal);
```

$$d := \begin{bmatrix} -12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -17 \end{bmatrix}$$

```
> b:=Vector([2,1,2,1]);u:=Vector([1,0,0,0]);
```

$$b := \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$u := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

```
> evalf(a^(-1).b);
```

$$\begin{bmatrix} -0.1259778797 \\ 0.05754878158 \\ 0.1494469922 \\ -0.01879327399 \end{bmatrix}$$

```
> y:=array(0..20):y[0]:=u:for k from 1 to 20 do
  y[k]:=d^(-1).(b-(a-d).y[k-1]) od:
> seq(evalf(y[k]),k=0..20);
```

$$\begin{bmatrix} 1. \\ 0. \\ 0. \\ 0. \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -0.1666666667 \\ -0.07692307692 \\ -0.06666666667 \\ 0.1764705882 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -0.1373303167 \\ 0.05520361991 \\ 0.1283559578 \\ -0.1441930618 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -0.1734414279 \\ 0.1140155470 \\ 0.1941427853 \\ -0.02959808358 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -0.1089944070 \\ 0.05525401018 \\ 0.1474835009 \\ 0.002421690338 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} -0.1197795596 \\ 0.04738048914 \\ 0.1395905819 \\ -0.01616509246 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -0.1292606372 \\ 0.05861709646 \\ 0.1500428123 \\ -0.02380425302 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -0.1273211985 \\ 0.05979779155 \\ 0.1514889860 \\ -0.01904118779 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -0.1251751842 \\ 0.05722249168 \\ 0.1491985579 \\ -0.01772717177 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} -0.1257390025 \\ 0.05709169197 \\ 0.1490180963 \\ -0.01878805476 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -0.1261595455 \\ 0.05764199181 \\ 0.1495193676 \\ -0.01902288073 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -0.1260207864 \\ 0.05764277111 \\ 0.1495350049 \\ -0.01878305986 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -0.1259368069 \\ 0.05752437328 \\ 0.1494271049 \\ -0.01874466240 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} -0.1259707157 \\ 0.05752988508 \\ 0.1494290826 \\ -0.01879780774 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -0.1259870177 \\ 0.05755493381 \\ 0.1494521097 \\ -0.01880346715 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -0.1259789727 \\ 0.05755253326 \\ 0.1494505769 \\ -0.01879180846 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -0.1259758697 \\ 0.05754728307 \\ 0.1494457218 \\ -0.01879116252 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} -0.1259777432 \\ 0.05754805114 \\ 0.1494462860 \\ -0.01879369015 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -0.1259783167 \\ 0.05754913795 \\ 0.1494472984 \\ -0.01879370596 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -0.1259778877 \\ 0.05754892074 \\ 0.1494471285 \\ -0.01879316393 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -0.1259777857 \\ 0.05754869853 \\ 0.1494469200 \\ -0.01879318682 \end{bmatrix}$$

>