1. $N(A) = \left(\displaystyle\sum_{(i,j)\in [\![1,n]\!]} a_{ij}^2\right)^{1/2}$ donc on reconnait la norme euclidienne associée à la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
2. $\mathrm{tr}(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^n 1.a_{ii} \leq \left(\sum_{i=1}^n 1^2 \sum_{i=1}^n a_{ii}^2\right)^{1/2}$ d'après l'inégalité de C.S. et $\displaystyle\sum_{i=1}^n a_{ii}^2 \leq (N(A))^2$ donc $\mathrm{tr}(A) \leq \sqrt{n}N(A)$ avec égalité ssi $((1,...,1),(a_{11},...,a_{nn}))$ est une famille liée et $\displaystyle\sum_{i=1}^n a_{ii}^2 = (N(A))^2$ ie ssi A est une matrice kI_n.
3. Si $O \in O_n(\mathbb{R})$, alors $N(OA) = \sqrt{\mathrm{tr}({}^tA{}^tOOA)}$ et ${}^tOO = I_n$.
$(N(AB))^2 = \displaystyle\sum_{i,j} c_{ij}^2$ avec $c_{ij}^2 = \left(\sum_k a_{ik}b_{kj}\right)^2 \leq \sum_{k_1} a_{ik_1}^2 \sum_{k_2} b_{k_2j}^2$ (toujours C.S.)
$(N(AB))^2 \leq \displaystyle\sum_{i,j,k_1,k_2} a_{ik_1}^2 b_{k_2j}^2 = (N(A))^2(N(B))^2$ avec égalité ssi $(L_i(A), C_j(B))$ est une famille liée pour tout (i,j), $L_i(A)$ (resp.$C_j(B)$) désignant la $i-$ème (resp. $j-$ème) ligne (resp. colonne) de A (resp.B).
Si $A \neq 0$ et $B \neq 0$, c'est équivalent à l'existence d'un vecteur $V \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $\forall i,\ L_i(A) = \alpha_i^t V$ et $\forall j,\ C_j(B) = \beta_j V$ ie A et B sont des matrices de rang 1 de la forme $A = \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix} {}^tV$ et $B = V(\beta_1,\dots,\beta_n)$.
$N(A) = \sqrt{(\displaystyle\sum_i \alpha_i^2)({}^tVV)}$ et $N(B) = \sqrt{(\displaystyle\sum_j \beta_j^2)({}^tVV)}$.
4. Il s'agit de chercher la projection orthogonale H de A sur le sous-espace $\mathscr{S}$ des matrices symétriques, pour le produit scalaire associé à N, ie $\varphi : (A,B) \mapsto \dfrac{1}{2}(\mathrm{tr}({}^tAB) + \mathrm{tr}({}^tBA))$.
Soit $\mathscr{A}\mathscr{S}$ le sous-espace des matrices antisymétriques. Si $(A,B) \in \mathscr{S} \times \mathscr{A}\mathscr{S}$, alors $\varphi(A,B) = 0$, donc $\mathscr{A}\mathscr{S}$ est l'orthogonal de $\mathscr{S}$ et $H = \dfrac{1}{2}(A +^t A)$.
5. $N_\infty : A \mapsto \max\limits_{ij} |a_{ij}|$ et $N_\infty \leq N \leq nN_\infty$, ces coef. étant "les meilleurs".
$N_1 : A \mapsto \displaystyle\sum_{ij} |a_{ij}|$ et $\dfrac{1}{n}N_1 \leq N \leq N_1$, ces coef. étant "les meilleurs".

O16-070

```
> restart;
> with(LinearAlgebra):
> N:=proc(a)
  sqrt(Trace(Transpose(a).a)) end;
```

$$N := \mathbf{proc}(a)\ \mathrm{sqrt}(LinearAlgebra{:-}Trace((LinearAlgebra{:-}Transpose(a)) \,.\, a))\ \mathbf{end\ proc}$$

```
> a:=Matrix(4,4,(i,j)->i+j);b:=Matrix(4,4,(i,j)->i*j);c:=a.b;d:=Ma
  trix(4,4,(i,j)->i-j);
```

$$a := \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$b := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \end{bmatrix}$$

$$c := \begin{bmatrix} 40 & 80 & 120 & 160 \\ 50 & 100 & 150 & 200 \\ 60 & 120 & 180 & 240 \\ 70 & 140 & 210 & 280 \end{bmatrix}$$

$$d := \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> N(a),N(b),N(c),N(d);
```

$$2\sqrt{110},\ 30,\ 60\sqrt{105},\ 2\sqrt{10}$$

```
>
```