1. Unicité : Si $\forall t \in \mathbb{R}_+^\star,\ P_n(t+1/t) = Q_n(t+1/t)$, alors $\forall u (= t+1/t) \in [2, +\infty[,\ P_n(u) = Q_n(u)$. Les 2 polynômes coïncident sur un ensemble infini dons sont égaux.
   Existence : On remarque que $X^{n+1} + \dfrac{1}{X^{n+1}} = \left(X^n + \dfrac{1}{X^n}\right)\left(X + \dfrac{1}{X}\right) - \left((X^{n-1} + \dfrac{1}{X^{n-1}}\right)$ et on procède par récurrence.
   Soit (Π_n) : $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que ... existe.
   Initialisation (double) avec $P_0 = 2$ et $P_1(u) = u$.
   Hérédité : Supposons $n \geq 1, (\Pi_{n-1})$ et (Π_n) ; alors $uP_n(u) - P_{n-1}(u)$ est bien un polynôme et il vérifie ... d'où (Π_{n+1}).
   Par récurrence avec 2 prédécesseurs, le coefficient dominant est 1 sauf pour $n = 0$ et le degré est n. (On pourrait aussi étudier la parité)
2. Il semble que P_n admette n racines réelles distinctes situées dans $[-2, 2]$ et présentant une symétrie par rapport à 0.
   Preuve : Soit $u \in [-2, 2]$. Alors $u = 2\cos\theta = z + 1/z$ pour un z de module 1.
   $P_n(u) = 0 \iff z^n + \dfrac{1}{z^n} = 0 \iff (z \neq 0 \text{ et } z^{2n} = -1)$
   d'où $P_n(u) = 0 \iff (u = z+1/z$ et $z = \exp(i\pi/2n + ik\pi/n) = \exp\dfrac{i(2k+1)\pi}{2n} = z_k)$ avec $k \in [\![-n, n-1]\!]$ par exemple.
   Les $\theta_k = \dfrac{i(2k+1)\pi}{2n}$ sont dans $\left[\dfrac{-i(2n-1)\pi}{2n}, \dfrac{i(2n-1)\pi}{2n}\right] \subset [-\pi, \pi]$ et deux à deux opposés. On conserve seulement $k \in [\![0, n-1]\!]$. Alors les θ_k sont dans $[0, \pi]$ et deux à deux distincts donc les n valeurs associées de u sont distinctes (cos est ici injectif), dans $[-2, 2]$, et comme $\pi - \theta_k = \theta_{n-1-k}$ et $k \mapsto n-1-k$ applique $[\![0, n-1]\!]$ sur lui-même, on a bien la symétrie.
3. $\dfrac{1}{P_n(u)} = \dfrac{1}{\prod_{k=0}^{n-1}(u-u_k)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{P_n'(u_k)(u-u_k)}$ et $P_n(2\cos\theta) = 2\cos(n\theta)$ donne avec $u_k = 2\cos\theta_k$:
   $-2\sin(\theta_k)P_n'(u_k) = -2n\sin(n\theta_k)$ donc $\dfrac{1}{P_n(u)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{\sin\theta_k}{n\sin(n\theta_k)(u-u_k)}$.

O16-065

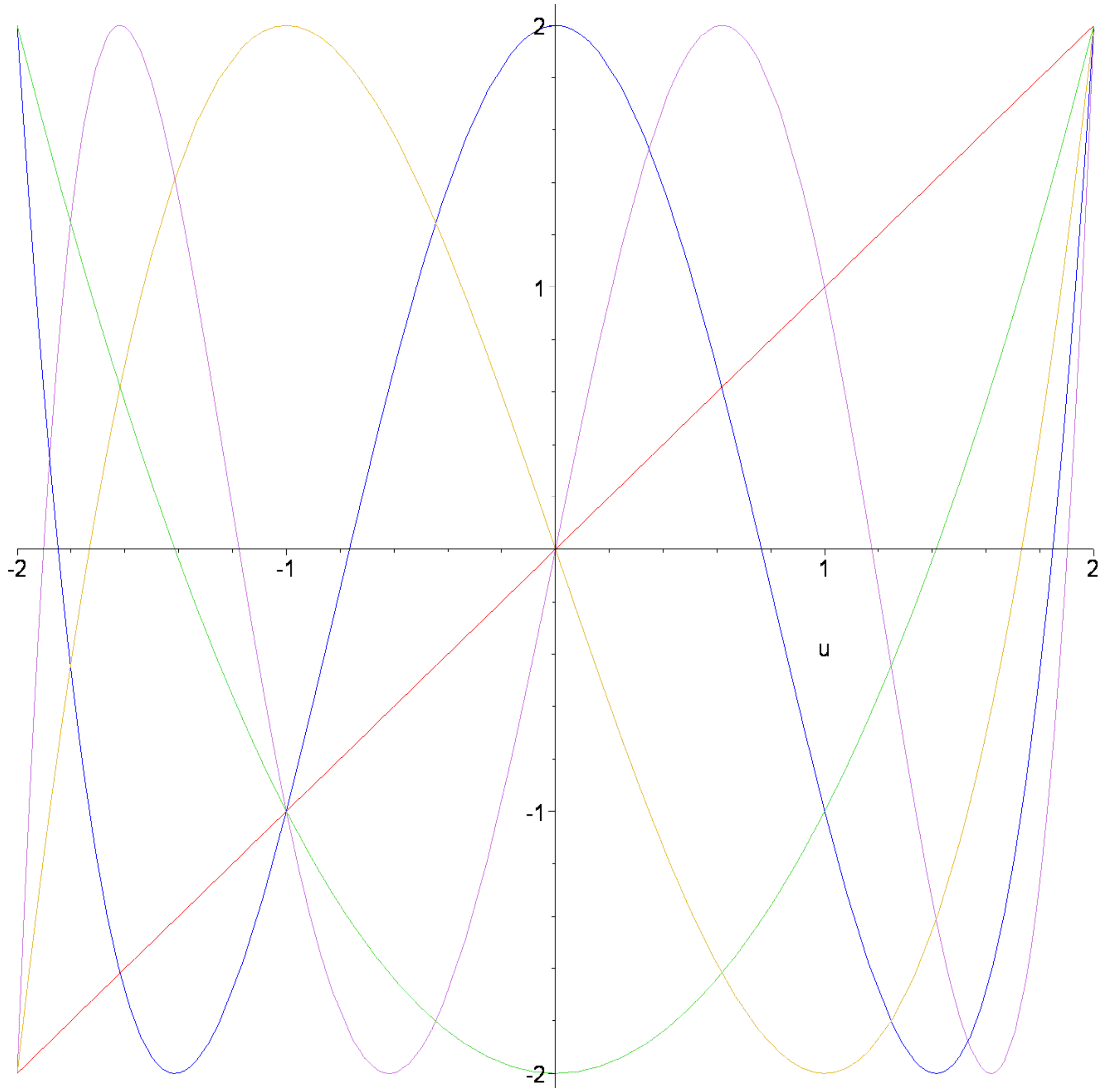
```
> restart;
> pol:=proc(n)
  if n=0 then 2 elif n=1 then u else expand(u*pol(n-1)-pol(n-2)) fi end;
```

$$pol := \mathbf{proc}(n)\ \mathbf{if}\ n = 0\ \mathbf{then}\ 2\ \mathbf{elif}\ n = 1\ \mathbf{then}\ u\ \mathbf{else}\ \mathrm{expand}(u*\mathrm{pol}(n-1) - \mathrm{pol}(n-2))\ \mathbf{end\ if\ end\ proc}$$

```
> cbes:=seq(pol(n),n=1..5);
```

$$cbes := u,\ u^2 - 2,\ u^3 - 3\,u,\ u^4 - 4\,u^2 + 2,\ u^5 - 5\,u^3 + 5\,u$$

```
> plot([cbes],u=-2..2);
```




```
> seq(convert(1/pol(n),parfrac,u,complex),n=1..5);
```

$$\frac{1}{u},\ -\frac{0.3535533907}{u + 1.414213562} + \frac{0.3535533907}{u - 1.414213562},\ -\frac{0.3333333332}{u} + \frac{0.1666666666}{u + 1.732050808} + \frac{0.1666666666}{u - 1.732050808},$$
$$\frac{0.2309698832}{u + 0.7653668647} + \frac{0.09567085824}{u - 1.847759065} - \frac{0.09567085806}{u + 1.847759065} - \frac{0.2309698831}{u - 0.7653668647},$$

$$\frac{0.1999999998}{u}+\frac{0.06180339886}{u-1.902113033}-\frac{0.1618033988}{u-1.175570505}+\frac{0.06180339886}{u+1.902113033}-\frac{0.1618033988}{u+1.175570505}$$

```
> evalf(seq(sin((2*k+1)*Pi/10)/5,k=0..4));# OK pour la décomposition de P_5
```

$$0.06180339888,\ 0.1618033989,\ 0.2000000000,\ 0.1618033989,\ 0.06180339888$$

```
>
```