f est continue sur $\mathbb{R}^2$ donc bornée sur toute boule fermée (donc compacte) $\overline{B(0,R)}$ de $\mathbb{R}^2$.
Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $N = \max(x,y)$.
$|f(x,y| \leq \dfrac{N^2}{1+e^{N^2}}$ et $\lim\limits_{N\to+\infty} \dfrac{N^2}{1+e^{N^2}} = 0$ donc $\exists R>0,\ \forall N \geq R,\ |f(x,y| \leq \dfrac{N^2}{1+e^{N^2}} \leq 0.01$: pour un tel R, $\sup\limits_{\mathbb{R}^2\setminus B(0,R)} |f|$ existe dans $\mathbb{R}$ et $\sup\limits_{\mathbb{R}^2\setminus B(0,R)} |f| \leq 0.01$.
f est donc bornée sur $\mathbb{R}^2$.
De plus $M = \sup\limits_{\mathbb{R}^2} |f| \geq f(0.5, 0.5) > 0.02$. On a donc : $\forall 0 < \epsilon < 0.01,\ \exists (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) > M - \epsilon > 0.02 - 0.01$ donc les (x,y) associés sont dans $\overline{B(0,R)}$.
On a ainsi prouvé que $M = \sup\limits_{\overline{B(0,R)}} |f|$ donc M est atteint puisque $\overline{B(0,R)}$ est compacte et f continue.

O14-929

```
> restart;with(plots):
> f:=(x,y)->x*y/(1+exp(x^2+2*y^2));
```

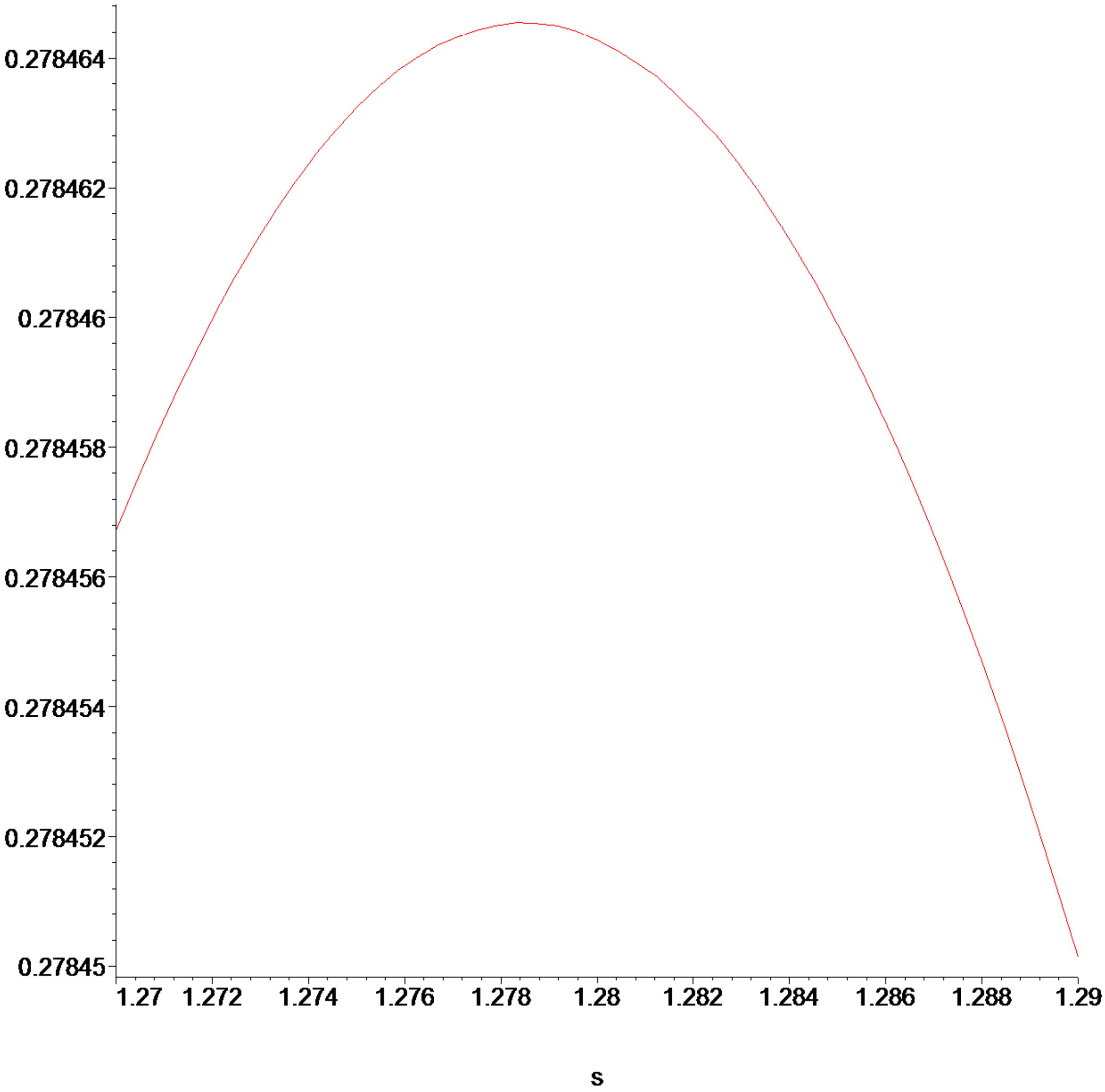
$$f := (x, y) \to \frac{x\, y}{1 + e^{(x^2 + 2\, y^2)}}$$

```
> plot3d(f(x,y),x=0.799..0.8005,y=0.565..0.566,grid=[100,100]):
```

Méthode 1

```
> # En elliptiques, avec x=r cos t , y=1/sqrt(2) r sin t, f(x,y)=1/2sqrt(2)
  sin(2t) r^2/(1+e^(r^2)) donc on cherche à maximiser sin(2t) et r^2/(1+e^(r^2))
> # Pour sin(2t) : t=Pi/4 (mod Pi)
> a:=s/(1+exp(s));plot(a,s=1.27..1.29);maximize(a);evalf(%/2/sqrt(2));
```

$$a := \frac{s}{1 + e^{s}}$$



$$\frac{\mathrm{LambertW}(e^{(-1)}) + 1}{1 + e^{(\mathrm{LambertW}(e^{(-1)}) + 1)}}$$

$$0.09845208320$$

Méthode 2

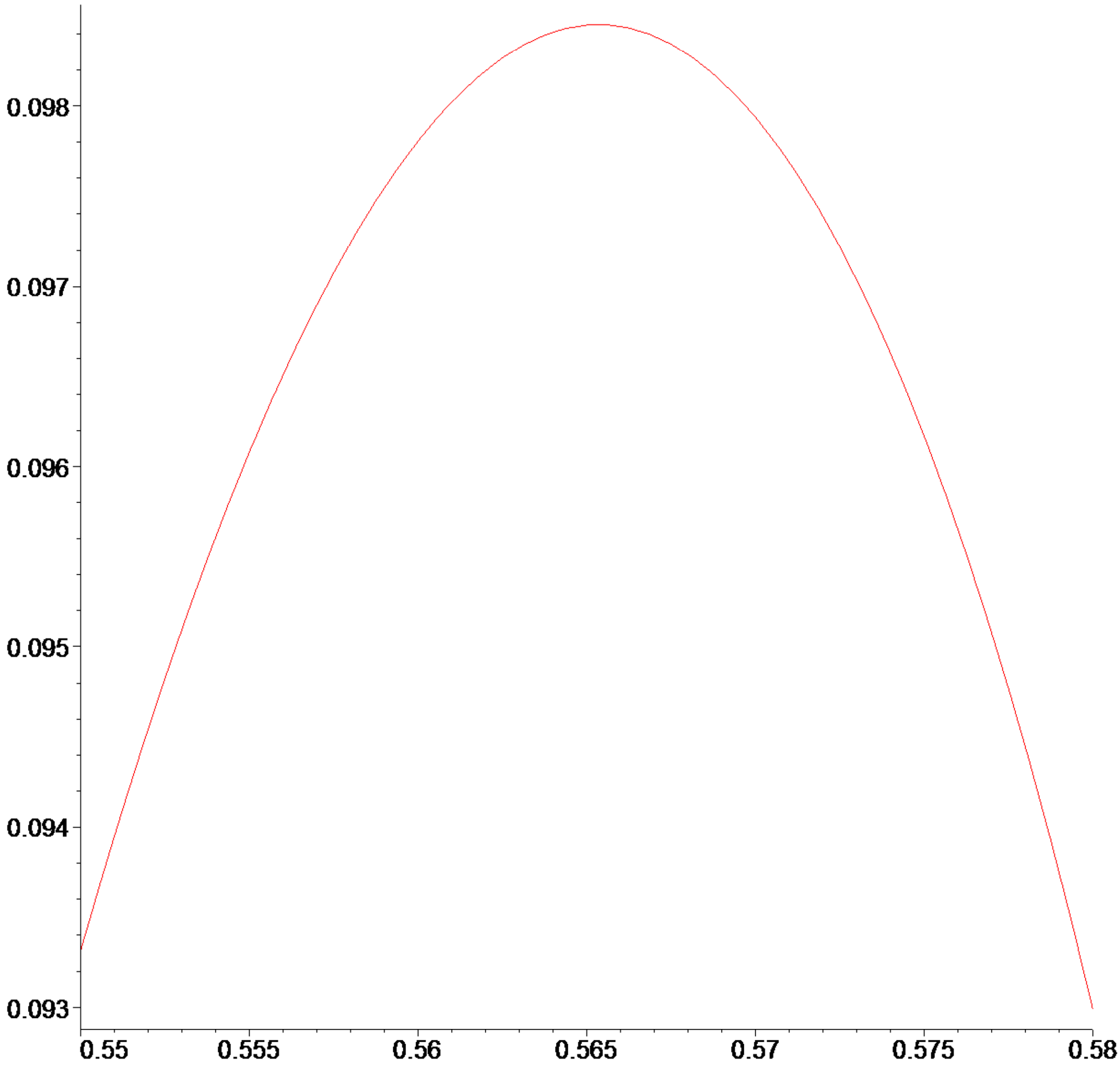
```
> h:=[solve(diff(f(x,y),y),x)];
```

$$h := [0, \sqrt{-2\,y^2 - \ln(-1+4\,y^2)}, -\sqrt{-2\,y^2 - \ln(-1+4\,y^2)}\,]$$

```
> k:=subs(x=op(2,h),f(x,y));
```

$$k := \frac{\sqrt{-2\,y^2 - \ln(-1+4\,y^2)}\;y}{1 + e^{(-\ln(-1+4\,y^2))}}$$

```
> plot(k,y=0.55 ..0.58);
```




```
>
> l:=diff(k,y);n:=[solve(l)];m:=subs(y=op(3,n),k);
```

$$l := \frac{1}{2}\,\frac{y\left(-4\,y-\frac{8\,y}{-1+4\,y^2}\right)}{\sqrt{-2\,y^2-\ln(-1+4\,y^2)}\left(1+\frac{1}{-1+4\,y^2}\right)}+\frac{\sqrt{-2\,y^2-\ln(-1+4\,y^2)}}{1+\frac{1}{-1+4\,y^2}}+\frac{8\,\sqrt{-2\,y^2-\ln(-1+4\,y^2)}\,y^2}{\left(1+\frac{1}{-1+4\,y^2}\right)^2(-1+4\,y^2)^2}$$

$$n := \left[\frac{1}{2}\,I,\ \frac{-1}{2}\,I,\ \frac{1}{2}\sqrt{\mathrm{LambertW}(e^{(-1)})+1},\ -\frac{1}{2}\sqrt{\mathrm{LambertW}(e^{(-1)})+1}\right]$$

$$m := \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{-\frac{1}{2}\,\mathrm{LambertW}(e^{(-1)})-\frac{1}{2}-\ln(\mathrm{LambertW}(e^{(-1)}))}\,\sqrt{\mathrm{LambertW}(e^{(-1)})+1}}{1+\frac{1}{\mathrm{LambertW}(e^{(-1)})}}$$

```
> evalf(m);
```

$$0.09845208330$$

```
>
```