On cherche $(A_{t_1} \cdots A_{t_{n-1}})(\Delta)$ où $\Delta(X) = -\frac{1}{n(b-a)}\left[(X-b)^n - (X-a)^n\right]$.

On sait que :

$$\begin{cases} A_{t_1} \cdots A_{t_{n-1}} \text{ commutent.} \\ \text{Pour } A_{t_k} : \mathbb{C}_{n-1}[X] \longrightarrow \mathbb{C}_{n-2}[X], \quad A_{t_k}\left((X-t_k)^{n-1}\right) = 0 \\ \qquad \text{(étude du noyau)} \end{cases}$$

<u>Supposons $t_1 \dots t_{n-2}$ distincts</u> Soit $\mathcal{B} = \left(1, (X-t_1)^{n-1}, \dots, (X-t_{n-1})^{n-1}\right)$

$$\operatorname{mat}_{\mathcal{B}_c} \mathcal{B} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & (-1)^{n-1}t_1^{n-1} & \cdots & (-1)^{n-1}t_{n-1}^{n-1} \\ \hline 0 & \vdots & & \\ \vdots & \binom{n-1}{k}(-1)^k t_1^k & & \\ \vdots & \binom{n-1}{1}(-1)t_1 & & \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \end{array}\right)_{n+1,\,n+1}$$

$$\det_{\mathcal{B}_c} \mathcal{B} = C \begin{vmatrix} t_1^{n-2} & \cdots & t_{n-1}^{n-2} \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \quad \text{où } C \neq 0 \qquad \text{(par blocs)}$$

$\neq 0$ (Vandermonde)

donc $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$.

Δ admet une décomposition : $\Delta(X) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k (X-t_k)^{n-1}$

et $\forall k \quad (A_{t_1} \cdots A_{t_{n-1}})(X-t_k)^{n-1} = \left((A_{t_1} \cdots \widehat{A_{t_k}} \cdots A_{t_{n-1}}) A_{t_k}\right)(X-t_k)^{n-1}$ (commutativité)

$$= (A_{t_1} \cdots \widehat{A_{t_k}} \cdots A_{t_{n-1}})(0_{\mathbb{C}_{n-2}[X]}) = 0$$

donc $\boxed{(A_{t_1} \cdots A_{t_{n-1}})(\Delta) = (A_{t_1} \cdots A_{t_{n-1}})(\alpha_0)} = \alpha_0 \, A_{t_1} \cdots A_{t_{n-1}}(1)$

or $A_{t_{n-1}}(1) = (n-1)\, 1 \in \mathbb{C}_{n-2}[X] \quad (A_{t_{n-1}} : \mathbb{C}_{n-1}[X] \longrightarrow \mathbb{C}_{n-2}[X])$

$A_{t_{n-2}} A_{t_{n-1}}(1) = (n-2)(n-1) \quad (A_{t_{n-2}} : \mathbb{C}_{n-2}[X] \longrightarrow \mathbb{C}_{n-3}[X])$

$\dots \quad \underline{A_{t_1} \cdots A_{t_{n-1}}(1) = (n-1)!}$

<u>On cherche α_0 :</u>

<u>On utilise $\Delta(X)$:</u>
$$\begin{cases} \Delta(X) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k (X-t_k)^{n-1} = \alpha_0 + \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} X^i (-1)^{n-1-i} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k t_k^{n-1-i}\right) \\ \text{et } \Delta(X) = b_0 + \binom{n-1}{1} b_1 X + \dots + \binom{n-1}{i} b_i X^k \dots + b_{n-1} X^{n-1} \end{cases}$$

donc
$$\begin{cases} \alpha_0 + (-1)^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k t_k^{n-1} = b_0 \qquad (\text{degré } 0) \\ \forall i \in [\![1, n-1]\!] \quad \binom{n-1}{i} (-1)^{n-1-i} \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k t_k^{n-1-i} = \binom{n-1}{i} b_i \end{cases}$$

ie
$$M \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\text{où} \quad M = \begin{pmatrix} 1 & (-t_1)^{n-1} & \cdots & (-t_{n-1})^{n-1} \\ 0 & (-t_1)^{n-2} & & (-t_{n-1})^{n-2} \\ \vdots & & & \\ 0 & (-t_1) & & (-t_{n-1}) \\ 0 & 1 & & 1 \end{pmatrix}_{n,n}$$

$$\text{donc} \quad \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{pmatrix}$$

On cherche M^{-1} sous la forme $M = \begin{pmatrix} 1 & L \\ (0) & V^{-1} \end{pmatrix}_{n,n}$

où $V = \begin{pmatrix} (-t_1)^{n-2} & \cdots & (-t_{n-1})^{n-2} \\ & & \\ 1 & & 1 \end{pmatrix}_{n-1,n-1}$ et $L = (\ell_1 \dots \ell_{n-1}) \in \mathcal{M}_{1,n-1}$

$$\begin{pmatrix} 1 & L \\ (0) & V^{-1} \end{pmatrix} M = I_n \iff \begin{cases} 1 = 1 \\ I_{n-1} = I_{n-1} \\ 0 = 0 \\ \left((-t_1)^{n-1} \dots (-t_{n-1})^{n-1}\right) + LV = 0 \end{cases}$$

$$\iff {}^tV\,{}^tL = (-1)^n \begin{pmatrix} t_1^{n-1} \\ \vdots \\ t_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix} \quad (*)$$

On utilise $P'(X)$: $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$ $0 = P'(t_k) = a_0 + \binom{n-1}{1} a_1 t_k + \dots + \binom{n-1}{i} a_i t_k^i + a_{n-1} t_k^{n-1}$

donc $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$ $\binom{n-1}{n-2} a_{n-2} t_k^{n-2} + \dots + \binom{n-1}{i} a_i t_k^i + \dots + a_0 = -a_{n-1} t_k^{n-1}$

Matriciellement :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} (-t_1)^{n-2} & \cdots & (-t_1)^i & \cdots & 1 \\ \vdots & & & & \\ (-t_{n-1})^{n-2} & \cdots & (-t_{n-1})^i & \cdots & 1 \end{pmatrix}}_{{}^tV} \underbrace{\begin{pmatrix} (-1)^{n-2}\binom{n-1}{n-2} a_{n-2} \\ \vdots \\ (-1)^i \binom{n-1}{i} a_i \\ \vdots \\ a_0 \end{pmatrix}}_{W} = -a_{n-1} \begin{pmatrix} t_1^{n-1} \\ \vdots \\ t_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{a_{n-1}}{(-1)^n}\, {}^tV\,{}^tL \text{ d'après } (*)$$

et ${}^tV$ est inversible donc $\boxed{{}^tL = \frac{(-1)^{n-1}}{a_{n-1}} W}$

On a donc $\alpha_0 = b_0 + L \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{pmatrix} = b_0 + \frac{(-1)^{n-1}}{a_{n-1}} \left((-1)^{n-2} \binom{n-1}{n-2} a_{n-2} b_1 + \dots + a_0 b_{n-1} \right)$

$$\boxed{\alpha_0 = \frac{(-1)^{n-1}}{a_{n-1}} \left[(-1)^{n-1} a_{n-1} b_0 + (-1)^{n-2} \binom{n-1}{n-2} a_{n-2} b_1 + \dots (-1)^i \binom{n-1}{i} a_i b_{n-1-i} + a_0 b_{n-1} \right]}$$

Comme $\begin{cases} (a_0 \dots a_{n-1}) \longmapsto \alpha_0 \text{ est une fonction continue sur } \{v \in \mathbb{C}^n \,/\, v_n \neq 0\} \\ \text{et } (t_1, \dots, t_{n-1}) \longmapsto (a_0, \dots, a_{n-1}) \text{ est continue sur } \mathbb{C}^{n-1} \left[-\binom{n-1}{n-2} a_{n-2} = a_{n-1} \sum_1^{n-1} t_k \right] \end{cases}$ par exemple.

le cas général s'obtient par passage à la limite.