1. I) Soit un réel $a > 0, u_0 > 0$ et $u_{n+1} = [(1 + au_n)^{1/2}] - 1$.
   Soit $f: \begin{array}{ccc} [0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & [(1+ax)^{1/2}] - 1 \end{array}$.
   (a) Montrer que $f([0, +\infty[) \subset [0, +\infty[$. En déduire que (u_n) est définie.
   (b) Montrer que f est croissante et en déduire les variations de (u_n).
   (c) Montrer que $f(x) - x$ est du signe de $x(a - 2 - x)$. Déterminer les points fixes de f.
   (d) Calculer $f'(0)$. Tracer l'allure du graphe de f dans les cas $a = 2, a > 2, a < 2$.
   (e) Variations et convergence de (u_n) dans les trois cas.
   (f) Convergence de la série $\sum u_n$.

   II) Soit u et v deux endomorphismes de $\mathbb{R}^n$. On considère $\Im(u + v)$ et $\Im(u) + \Im(v)$. Lequel est inclus dans l'autre ? Démonstration ?
   Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ avec $n > 2$ telle que $\mathrm{rg}(A) = 1$. Prouver que $\det(A +^t A) = 0$ (en se servant du début de l'exercice). (Gau-ccp) O17-900
2. I)
   (a) Montrer que $\sup\limits_{x \in \mathbb{R}_+} |xe^{-x}| = e^{-1}$.
   (b) Montrer que le rayon de convergence de la série $\sum nx^n$ est 1.
   (c) Calculer la somme de cette série.
   (d) Convergence et somme de la série $\sum \int_0^{+\infty} nx^n e^{-nx} \, \mathrm{d}x$.

   II) $P(X) = nX^n - X^{n-1} - X^{n-2} - ... - X^2 - X - 1$ et $Q(X) = (n + 1)X^n - nX^{n+1} - 1$.
   Prouver que P et Q ont les mêmes racines et que les racines de P sont simples. (Dem-ccp) O17-901
3. I) ?

   II) E est un ensemble à n éléments, P l'ensemble des parties de E. Calculer $\sum\limits_{X \in P} card(X)$. (Raph-ccp) O17-902
4. I) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
   (a) Montrer que, si A est diagonalisable, alors A^2 est diagonalisable.
   (b) En prenant pour A la matrice dont tous les éléments sont nuls sauf $a_{1,n} = 1$, montrer que la réciproque est fausse. On suppose désormais A^2 inversible et diagonalisable.
   (c) Montrer que $\ker A = \ker A^2$ et que pour toute valeur propre $\lambda \neq 0$ de A^2, $\ker(A^2 - \lambda I_n) = \ker(A - \alpha I_n) \oplus \ker(A + \alpha I_n)$, α désignant une racine carrée de λ.
   (d) En déduire que A est diagonalisable.

   II) ? (Pré-ccp) O17-903
5. I) Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
   Soit une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. A vérifie la propriété (P) s'il existe une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\det(M - \lambda A) \neq 0$.
   (a) Montrer que toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ admet au moins une valeur propre. En déduire que, pour toute matrice $A \in GL_n(\mathbb{C})$ et toute $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, il existe un λ tel que $\det(M - \lambda A) = 0$.
   (b) i. Soit T une matrice triangulaire supérieure de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à 0. Calculer $\det(I_n - \lambda T)$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$. En déduire que T vérifie la propriété (P).
      ii. Soit $0 \leq r \leq n - 1$. Soit T_r la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ définie par blocs : $T_r = \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
      Calculer le rang de T_r.
      iii. Soit A et B deux matrices de même rang de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
      Montrer qu'il existe deux matrices inversibles P, Q telles que $B = PAQ$. Montrer que, si A vérifie (P), B aussi.
      iv. En déduire que toutes les matrices non inversibles de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ vérifient (P).
   (c) Montrer que les matrices inversibles de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ ne peuvent pas vérifier (P).
   (d) Etudier le cas des matrices inversibles de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ (On distinguera n pair et n impair)

   II) Soit $f(x) = \left(\dfrac{5^x + 2^x}{2}\right)^{1/x}$. Etudier les limites en $0, +\infty, -\infty$. (And-ccp) O17-904

6. I) Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $u_n(\alpha) = \dfrac{n!}{\prod_{k=0}^{n}(\alpha+k)}$.
   (a) Montrer que $(u_n(\alpha))_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et convergente. Soit $l(\alpha)$ sa limite.
   (b) Montrer que la série de terme général $(u_n(\alpha) - u_{n+1}(\alpha))$ est convergente.
   (c) Exprimer $(u_n(\alpha) - u_{n+1}(\alpha))$ au moyen de $u_n(\alpha)$. En déduire que $\forall\alpha > 0,\ l(\alpha) = 0$.
   (d) Montrer $u_n(\alpha) \geq \dfrac{1}{n+\alpha}$ si $\alpha \in]0,1]$.
   (e) Soit $I_n(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}(1-e^{-t})^n \, \mathrm{d}t$.
      i. Montrer la convergence de l'intégrale $I_n(\alpha)$.
      ii. Trouver une relation entre $I_n(\alpha)$ et $I_{n-1}(\alpha+1)$.
      iii. En déduire que $I_n(\alpha) = u_n(\alpha)$.
      iv. Etudier la convergence de la série $\sum u_n(\alpha)$ pour $\alpha > 1$.

   I) I Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A.{}^tA.A = I_n$. Déterminer toutes les matrices A possibles. (Royn-CCP) O17-905

7. I) Soit $f(x) = \displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{x+1}\ln t}$.
   (a) Domaine de définition ?
   (b) Continuité sur $\mathbb{R}_+^*$ et limite en 0 ?
   (c) Dérivabilité et calcul de la dérivée.
   (d) Soit $g(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\exp(-t)}{t} \, \mathrm{d}t$.
      i. Domaine de définition.
      ii. Relation entre $f(x)$ et $g(x)$.
      iii. En déduire un équivalent de f en 0.

   II) A est une matrice inversible de rang 6 vérifiant $\mathrm{tr}A = 8$ et $A^3 - 3A^2 + 2A = 0$.
   Prouver que A est diagonalisable. Trouver l'ordre des valeurs propres, une matrice diagonale semblable et le polynôme caractéristique. (Liss-ccp) O17-906

8. I) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/4} (\tan t)^n \, \mathrm{d}t$.
   On étudie la série entière de terme général $I_n x^n$. On appelle R son rayon de convergence.
   (a) Calculer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$.
   (b) Montrer que (I_n) est une suite bornée. En déduire que $R \neq 0$.
   (c) i. Montrer que $I_{n+2} + I_n = \dfrac{1}{n+1}$. En déduire que la série $\sum I_n$ diverge.
      ii. Calculer R.
   (d) On note, pour tout $x \in]-R, R[$, $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} I_n x^n$. Montrer que $S(x) = \dfrac{1}{1+x^2}(-x\ln(1-x) + \dfrac{\ln 2}{x} + \dfrac{\pi}{4})$.
   (e) Montrer que la série $\sum (-1)^n I_n$ est convergente et calculer sa somme.

   II) cf O17-902 (Berr-ccp) O17-907

9. I) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\forall M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}),\ \Phi_A(M) = AM - MA$.
   $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que Φ_A est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
   (b) Pour tout $i \in [\![1, 4]\!]$, calculer $\phi_A(E_i)$. En déduire la matrice de Φ_A dans la base (E_i).
   (c) i. Justifier que ϕ_A est diagonalisable.
      ii. Calculer le polynôme caractéristique et en déduire les valeurs propres de Φ_A. Déterminer une base (F_1, F_2, F_3, F_4) constituée de vecteurs propres de Φ_A.
      iii. En déduire le noyau et l'image de Φ_A.

(d) Déterminer B tel que (?)

II) $u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} 2^{k/n}$. Trouver la limite par 2 méthodes.

Question supplémentaire : Démontrer le thm des sommes de Riemann sur un exemple. (Esp-ccp) O17-908

10. I) Soit $f = (t \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\exp(-nt^2)}{n^2+1}$.

(a) Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

(b) Montrer que $\lim\limits_{+\infty} f = 1$.

(c) Soit $u_n(t) = \dfrac{\exp(-nt^2)}{n^2+1}$.

i. Etudier les variations de u_n' sur $[0, +\infty[$. Trouver $\|u_n'\|_\infty$.

ii. Montrer que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

(d) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{10} \frac{1}{n^2+1}$ est une valeur approchée de $f(0)$ à 10^{-1} près.

(e) Montrer que $t \mapsto f(t) - 1$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

II) Soit $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques d'ordre n.
Montrer que $(A, B) \mapsto \mathrm{tr}(AB)$ est un produit scalaire sur $S_n(\mathbb{R})$.

II-bis) Soit U une matrice relle à n lignes et 1 colonne. On suppose que ${}^tUU = 1$ eet on note $P = U{}^tU$.
Montrer que P est diagonalisable puis donner les éléments propres de P. (Crum et Loub-ccp) O17-909

11. I) Soit (C) définie par $x(t) = \sin 2t,\ y(t) = 1 - \cos 2t,\ z(t) = 2\cos t$.

(a) Montrer que (C) est incluse dans une sphère de centre O de rayon R.

(b) Montrer que $S(a, b, R) : (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ contient (C) si et seulement si $a = 0, b = 1, R = 1$.

(c) Montrer que (C) est contenue dans un cylindre dont les génératrices sont parallèles à l'axe des x.

(d) Montrer que $\mu x^2 + \mu y^2 + 2(\beta - \mu)y + \beta z^2 - 4\beta = 0$ contient (C) quelque soit (β, μ).

(e) L'équation précédente contient-t-elle des cônes ? Quels sont leurs sommets ?

II) Soit $A_n = \left(\dfrac{(2n)!}{n!}\right)^{1/n}$ et $S_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(1 + \frac{k}{n})$.

Exprimer A_n en fonction de S_n. Trouver $\lim S_n$ puis $\lim A_n$. (Bois-ccp) O17-910

12. $\forall t \in \mathbb{R}$, on note $[t] = t - E(t)$ où E est la partie entière. Montrer que $0 \leq \dfrac{[t]}{t^2} \leq \dfrac{1}{t^2}$ et en déduire la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{[t]}{t^2}\, \mathrm{d}t$.

Soit g de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, +\infty[$; montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*$,
$\displaystyle\int_k^{k+1} g'(t)E(t)\ \mathrm{d}t = (k+1)g(k+1) - kg(k) - g(k+1)$ et en déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} g(k) = ng(n) - \int_1^n g'(t)E(t)\ \mathrm{d}t$.

On pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$; montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1 - \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{[t]}{t^2}\ \mathrm{d}t$.

Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, +\infty[$; on note $S_f(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{E(x)} f(k)$ et ϕ_n la fonction qui vaut 1 pour $x \geq n$ et 0 sinon.

Montrer que $\forall k \in [1, n]$, $g(n) = g(k) - \displaystyle\int_1^n g'(t)\phi_k(t)\ \mathrm{d}t$

En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(k)g(k) = g(n)S_f(n) + \int_1^n g'(t)S_f(t)\ \mathrm{d}t$. O17-C143

13. Résoudre $y'' - y = 0$ sur $\mathbb{R}$ et en déduire que toute solution non nulle s'annule au plus une fois sur $\mathbb{R}$.
Soit l'équation différentielle $y'' + qy = 0$, $y(\alpha) = 0$ où q est une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$; montrer que si $y'(\alpha) = 0$, $y = 0$.
Montrer que si (z_n) est un suite de réels tous distincts de α, convergeant vers α et telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $y(z_n) = 0$, alors $y'(\alpha) = 0$.

Montrer que, si y n'est pas la fonction nulle, il existe un voisinage de α sur lequel y ne s'annule pas.
On suppose $\forall x \in \mathbb{R}$, $q_1(x) \leq q_2(x)$ et on note y_1 (resp. y_2) une solution de $y'' + q_1 y$ (resp. $y'' + q_2 y$).
Montrer que y_1 et y_2 sont de signe constant sur un intervalle à préciser.
Montrer que $W = y_1' y_2 - y_1 y_2'$ est monotone sur cet intervalle.
Démontrer qu'entre deux zéros de y_1, il existe un zéro de y_2. O17-C144

14. I) Pour $s > 0$, montrer la convergence de $\Gamma(s) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{s-1}\ \mathrm{d}t$ et $I_n(s) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-nt} t^{s-1}\ \mathrm{d}t$ $(n \geq 1)$.
Montrer que $I_n(s) = \dfrac{\Gamma(s)}{n^s}\cdot$
Montrer que :
$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k I_{2k+1}(s) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t} t^{s-1}\ \mathrm{d}t}{1+\mathrm{e}^{-2t}} + (-1)^n \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-(2n+3)t} t^{s-1}\ \mathrm{d}t}{1+\mathrm{e}^{-2t}}\cdot$$
Montrer que $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{(2n+1)^s}$ converge.
Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-(2n+3)t} t^{s-1}}{1+\mathrm{e}^{-2t}}\ \mathrm{d}t = 0$.
En déduire $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{\operatorname{ch} t}\ \mathrm{d}t$ sous la forme d'une série. O16-C170

15. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $h_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $u_n = h_n - \ln n$.
En écrivant la série de terme général $u_{n+1} - u_n$, montrer que la suite (u_n) converge ; on note γ sa limite.
Montrer que $h_n = \gamma + \ln n + o(1)$.
Montrer que $\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} = a h_{2n} - b h_n$ et en déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} = -\ln 2$.
On pose $w_n = \dfrac{1}{n}$ si n est multiple de 4 et $w_n = -\dfrac{\alpha}{n}$ sinon ; on note $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} w_k$.
Montrer que la suite de terme général S_{4n} est convergente si et seulement si $\alpha = 3$.
Montrer que dans ce cas (S_n) converge et calculer $\sum w_n$. O17-C146

16. Donner une équation cartésienne de la courbe définie par :
$x(t) = a \cos t$, $y(t) = b \sin t$; l'identifier et la représenter.
Montrer que la tangente au point de paramètre t a pour équation $D_t : \dfrac{x}{a}\cos t + \dfrac{y}{b}\sin t = 1$.
Montrer que D_{t_1} et D_{t_2} sont orthogonales si et seulement si $b^2 \cos t_1 \cos t_2 + a^2 \sin t_1 \sin t_2 = 0$.
On note $x_a = \dfrac{x}{a}$ et $y_b = \dfrac{y}{b}$; montrer qu'il exsiste θ et α tels que $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{x_a^2 + y_b^2}}$, $\cos\alpha = \dfrac{x_a}{\sqrt{x_a^2 + y_b^2}}$, $\sin\alpha = \dfrac{y_a}{\sqrt{x_a^2 + y_b^2}}$.
Trouver les x, y solutions de $\dfrac{x}{a}\cos t + \dfrac{y}{b}\sin t = 1$ en fonction de θ et α.
Etudier l'ensemble des points d'intersections de deux tangentes D_{t_1} et D_{t_2} orthogonales. O17-C147

17. Pour $x \in]-1,1[$ et $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $f_x(\theta) = \displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{x^n \cos(n\theta)}{n}\cdot$
Montrer que $f_x(\pi)$ et $f_x(0)$ existent et les évaluer.
Montrer que $f_x(\theta)$ existe et est continue, dérivable, de dérivée $f_x'(\theta) = \dfrac{-2x\sin(\theta)}{1 + 2x\cos\theta + x^2}\cdot$
En déduire $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \ln(1 + 2x\cos\theta + x^2)\ \mathrm{d}\theta$. O17-C148

18. Donner la dimension du sous-espace F de l'espace E des fonctions réelles de classe $\mathcal{C}^2$, engendré par $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{sh} x$, $x \operatorname{ch} x$ et $x \operatorname{sh} x$; montrer que l'opérateur dérivation D est un endomorphisme de E et que F est stable par D. Donner la matrice de la restriction de D à F.
Montrer que T_λ défini par $T_\lambda(h)(x) = xh''(x) - \lambda h'(x) - xh(x)$ est un endorphisme de F et donner sa matrice.
Montrer que T_λ est bijectif si et seulement si $\lambda \neq 0$ et $\lambda \neq 2$.
Pour $\lambda = 2$, donner $\mathrm{Ker} T_\lambda$ et $\mathrm{Im} T_\lambda$.
Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$, $xy'' - 2y' - xy = \operatorname{ch} x$. O17-C150

19. Calculer une primitive de $t\sqrt{1-t^2}$.

    Prouver que la suite de terme général $a_n = \displaystyle\int_0^1 t^n\sqrt{1-t^2}$ṭ est décroissante. Calculer a_0 et a_1. Montrer que $a_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+4}a_n$.

    Montrer que $I_k = \displaystyle\int_0^1 t^k\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}$ṭ converge.

    Montrer que $I_k = 4\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^k(2u)\cos^2 u$ụ.

    En déduire $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$. O17-C151

20. I) Montrer que f, défini par $f(P)(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\int_0^1 P(t)\ \mathrm{d}t\right)X^k$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

    Montrer que $(P|Q) = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\ \mathrm{d}t$ est un produit scalaire.

    Déterminer les éléments diagonaux de la matrice de f dans la base canonique et en déduire $\mathrm{tr}(f)$.

    Montrer que, si $P(X) = X^n$, $f(P)(x) = \displaystyle\int_0^1 (x+t)^n\ \mathrm{d}t$ et en déduire que f est symétrique.

    CCP O16-C160

21. Montrer que, pour $\alpha > 0$, $I_\alpha = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\alpha t}\sin t}{\sqrt{t}}\ \mathrm{d}t$ est définie.

    Montrer que $x_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\mathrm{e}^{-\alpha t}\sin t}{\sqrt{t}}\ \mathrm{d}t$ est définie.

    Montrer que $x_n = (-1)^n\mathrm{e}^{-\alpha n\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{e}^{-\alpha u}\sin t}{\sqrt{u+n\pi}}\ \mathrm{d}u$.

    Montrer que $\sum x_n$ converge et que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x_n = I_\alpha$.

    En déduire que $I_\alpha > 0$.

    Montrer que $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{ixt}\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\ \mathrm{d}t$ est définie, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que $f'(x) = \dfrac{-1}{2(x+i)}f(x)$.

    Retrouver le signe de I_α. O17-C153

22. I) Pour $a \in \mathbb{R}$, montrer que Ω_a defini par $\Omega_a(f) = \dfrac{\partial f}{\partial x} + a\dfrac{\partial f}{\partial y}$ est un endomorphisme de l'espace V des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

    Soit $f \in V$. Montrer qu'il existe $F \in V$ unique, tel que, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = F(x, y-ax)$.
    Calculer les dérivées partielles de F en fonction de celles de f.
    En déduire $\mathrm{Ker}(\Omega_a)$ en fonction des dérivées partielles de f.
    Calculer $\mathrm{Ker}(\Omega_a \circ \Omega_a)$. Exprimer $\Omega_a^2 = \Omega_a \circ \Omega_a$ et Ω_a^3 en fonction des dérivées successives de f. Faire une hypothèse sur Ω_a^n. La démontrer.
    CCP O16-C171

23. Pour $(x,y) \in [0,\pi]^2$, on pose $K(x,y) = x(\pi - y)$ si $x < y$ et $K(x,y) = y(\pi - x)$ sinon. Tracer la courbe de K sur $[0,\pi]$ à y fixé.

    On pose $g(y) = \displaystyle\int_0^{\pi} K(x,y)f(x)\ \mathrm{d}x$, où f est continue sur $[0,\pi]$;

    montrer que $g(y) = (\pi - y)\displaystyle\int_0^{y} xf(x)\ \mathrm{d}x + y\int_y^{\pi}(\pi - x)f(x)\ \mathrm{d}x$.

    Montrer que g est deux fois dérivable sur $[0,\pi]$ et que $g'' = -\pi f$.

    Donner, en fonction de $\alpha_n = \displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)\ \mathrm{d}x$, les coefficients de Fourier de a, 2π-périodique, impaire, coïncidant avec g sur $[0,\pi]$. O17-C156

24. Montrer que $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$ est définie, continue et décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Quelle est sa limite en $+\infty$?

    Montrer qu'elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ existe et vaut $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$.

Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\ \mathrm{d}t$ existe et déterminer sa valeur.

Quelle est la limite de f en 0 ? $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ est-elle convergente ? O17-C158

25. Montrer que M_n, carrée d'ordre n, dont les coefficients diagonaux sont nul et tous les autres valent $\dfrac{1}{n-1}$, est diagonalisable.
Déterminer le rang de $M_n + \dfrac{1}{n-1} I_n$ et en déduire que $-\dfrac{1}{n-1}$ est valeur propre de M_n.
Donner le spectre de M et la dimension des sous-espaces propres.
Écrire M_n en fonction de I_n et de la matrice J_n dont tous les coefficients valent 1.
Montrer qu'il existe deux réels a_p et b_p que l'on calculera, tels que $M_n^p = a_p J_n + b_p I_n$. Déterminer la limite de $(M_n)^p$ quand $p \to +\infty$. O17-C160

26. Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose $u_n(z) = \dfrac{\mathrm{e}^{nz}}{n^2}$ pour $n0$.
Calculer $|u_n(z)|$ et en déduire que $\sum u_n$ converge si et seulement si $\Re(z) \leq 0$.
Montrer que $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{nx}}{n^2}$ est continue sur $]-\infty, 0]$ et calculer sa limite en $-\infty$.
Montrer la convergence normale de $\sum u_n^{(k)}$ sur $]-\infty, a]$ pour $k \in \mathbb{N}$ et $a < 0$; en déduire que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\infty, 0[$ et calculer $f'(x)$ pour $x < 0$. O17-C161

27. Pour f et g continues sur $[0, 1]$, montrer que :
$\displaystyle\left|\int_0^1 f(t)g(t)\ \mathrm{d}t\right| \leq \sqrt{\int_0^1 f^2(t)\ \mathrm{d}t \int_0^1 g^2(t)\ \mathrm{d}t}$ (on pourra utiliser un produit scalaire bien choisi).
Montrer que $\displaystyle\left(\int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t\right)^2 \leq \int_0^1 f^2(t)\ \mathrm{d}t$ et étudier le cas d'égalité.
Montrer qu'il n'existe aucun réel A tel que pour toute fonction f continue sur $[0, 1]$, $\displaystyle\int_0^1 f^2(t)\ \mathrm{d}t \leq A\left(\int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t\right)^2$.
Montrer que :
$$\iint_{[0,1]^2} \big(f(u) - f(v)\big)\ \mathrm{d}u\ \mathrm{d}v = 2\int_0^1 f^2(t)\ \mathrm{d}t - 2\left(\int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t\right)^2.$$
Montrer que :
$$\exists A \in [0, 1],\ \int_0^1 f^2(t)\ \mathrm{d}t \leq A\left(\int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t\right)^2 + \frac{1}{2}\int_0^1 f'^2(t)\ \mathrm{d}t$$
et que 1 est la valeur optimale. O17-C163

28. Soient $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ ayant n valeurs propres distinctes et $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ qui commute avec f. Montrer que les vecteurs propres de f sont aussi des vecteurs propres de g.
Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^n$ où les matrices de f et de g sont toutes les deux diagonales.
Montrer $\exists!(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tel que $g = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} a_i f^i$.
Quelle est la dimension de $C_f = \{g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n),\ f \circ g = g \circ f\}$?
Soit $p \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ un projecteur de rang r.
Quelle est la dimension de $C_p = \{q \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n),\ p \circ q = q \circ p\}$? O17-C165

29. Soit $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x^2} - 1}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.
Écrire le développement limité à l'ordre 3 de f.
Montrer que f est développable en série entière. En déduire que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
Montrer que f est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et que f^{-1} est impaire.
Trouver le développement limité à l'ordre 3 en 0 de f^{-1}. O17-C166

30. Soient $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $\omega \in \mathbb{R}_+^*$. Soit l'équation différentielle $(E) : y'' + \omega^2 y = f$. Résoudre l'équation homogène.
Montrer que $\varphi(x) = \dfrac{1}{\omega}\displaystyle\int_0^x \sin(\omega(x-t))f(t)\ \mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et exprimer φ' et φ''. Montrer que φ est solution de (E).
En déduire l'ensemble des solutions de (E).
Soit $a > 0$. À quelle condition sur ω, (E) possède-t-elle une unique solution y telle que $y(0) = y(a)$ et $y'(0) = y'(a)$? O17-C167

31. Soit $\varphi(t) = \dfrac{1-t^3}{t}$ définie sur $]0,1]$.
Calculer $\varphi'(t)$. En déduire que φ est bijective de $]0,1]$ sur $[0,+\infty[$. Soit u sa fonction réciproque.
Montrer que $u(x)^3 - 1 + xu(x) = 0$ pour tout $x \geq 0$.
Montrer que u est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et que $u'(x) = -\dfrac{u(x)}{3u(x)^2+x}$.
Montrer que $u(x) \sim \dfrac{1}{x}$ en $+\infty$.
Discuter suivant α et β réels l'existence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^\alpha u(x)^\beta\ \mathrm{d}x$. O17-C168

32. Soit, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-xt}\ \mathrm{d}t$.
Montrer que le domaine de définition de f_n est $\mathbb{R}_+^*$.
Calculer explicitement $f_n(x)$ pour tout $x > 0$.
Calculer le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$ où $a_n = f_n(n)$. Sur $]-R,R[$, on note g sa somme.
Montrer que $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{xt}{\mathrm{e}^t - xt}\ \mathrm{d}t$. O17-C169

33. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Exprimer simplement ${}^tX{}^tMMX$. En déduire que $\mathrm{Ker}M = \mathrm{Ker}{}^tMM$ et que $\mathrm{rg}M = \mathrm{rg}({}^tMM)$.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tAA = A^2$. Montrer que $\mathrm{Im}A = \mathrm{Im}A^2$.
Montrer que $\mathbb{R}^n = \mathrm{Im}A \oplus \mathrm{Ker}A$ de manière orthogonale.
En déduire que A est symétrique. O17-C170

34. I) À $M \in \mathbb{C}$, d'affixe $z = \mathrm{e}^{i\theta}$, on associe M' d'affixe $z' = 1 + z + z^2$.
Montrer que $z' = (1 + 2\cos\theta)\mathrm{e}^{i\theta}$. Donner un argument de z' et son module. Montrer que O, M et M' sont alignés.
Montrer que $\Gamma = \{z'/|z| = 1\}$ est donné par $\rho = 1 + 2\cos\theta$.
Tracer Γ et donner les points à tangente horizontale puis verticale.
Donner la longueur de Γ en fonction de $\displaystyle\int_0^\pi \sqrt{5 + 4\cos\theta}\ \mathrm{d}\theta$.
CCP O16-C166

35. I) $E = \mathbb{R}_n[X]$, $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$. On pose $\mu_k = t^k$.
Montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^x t^k \mathrm{e}^t\ \mathrm{d}t$ converge.
Montrer, pour $P \in E$, que $\displaystyle\int_{-\infty}^x P(t)\mathrm{e}^t\ \mathrm{d}t$ converge.
On pose, pour tout $P \in E$, $\mathcal{L}(P)(x) = \mathrm{e}^{-x}\displaystyle\int_{-\infty}^x P(t)\mathrm{e}^t\ \mathrm{d}t$.
Montrer que $\mathcal{L}(\mu_{k+1}) = \mu_{k+1} - (k+1)\mathcal{L}(\mu_k)$.
En déduire que $\mathcal{L}(\mu_k) = (-1)^k k! \displaystyle\sum_{j=0}^k \frac{(-1)^j}{j!}\mu_j$.
En déduire que $\mathcal{L}$ est trigonalisable.
$\mathcal{L}$ est-il diagonalisable ? Donner ses valeurs propres.
CCP O16-C188

36. On munit $E = \mathbb{R}^{2n+1}$ du produit scalaire euclidien canonique. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $A \in \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$ la matrice canoniquement associée à f. On suppose que A est antisymétrique.

Montrer que, pour tout $(x,y)\in E^2$, $< f(x), y >= - < x, f(y) >$.
Montrer que l'unique valeur propre de f est 0.
Montrer que $A - I_{2n+1}$ et $A + I_{2n+1}$ sont inversibles.
Montrer que $B = (I_{2n+1} - A)(I_{2n+1} + A)^{-1} \in \mathcal{O}_{2n+1}(\mathbb{R})$ et $\det B = 1$. O17-C174

37. I) Soit $u_0 \in]0,1[$, $u_{n+1} = f(u_n)$, où $f(x) = \displaystyle\int_0^1 |x-t|\,\mathrm{d}t$.
Montrer que pour $x\in[0,1]$, $f(x) = x^2 - x + \dfrac{1}{2}\cdot$
Déterminer la valeur de $f(x)$ quand $x<0$ puis quand $x>1$.
Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n \in]0,1[$.
Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n \in [\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2}]$.
Calculer la dérivée de f et la majorer en valeur absolue.
En déduire que $(u_n)_n$ converge vers une limite ℓ que l'on calculera.
Que se passe-t-il quand $u_0 \geq 1$?
CCP O16-C180

38. Soit $f(x) = 1 + \dfrac{1}{2}\sin\dfrac{1}{x}\cdot$
Montrer que $\dfrac{1}{2} < f(x) < \dfrac{3}{2}$ et $f\big(f(x)\big) > 1$.
Montrer que, sur $[1,+\infty[$, f est $\dfrac{1}{2}$-lipschitzienne.
Montrer qu'il existe un unique $l>1$ tel que $f(l) = l$.
Vérifier que pour $n>0$, $u_{n+1} = f(u_n)$, $u_0 = a$ avec $a\neq 0$ est définie et montrer que, pour $n>2$, $u_n>1$.
Montrer que (u_n) converge vers l.
CCP O16-173

39. Soit $z(t) = \mathrm{e}^{it} - 2\mathrm{e}^{-2it}$ et $\Gamma = \{z(t), t\in[0,2\pi]\}$.
Montrer que $\overline{z(t)} = z(-t)$ et $z(t + 2\dfrac{\pi}{3}) = \mathrm{e}^{2i\pi/3} z(t)$.
Comment retrouver $z(-t)$ avec $z(t)$ et $z(t + 2\dfrac{\pi}{3})$?
Montrer que $|z(t)|^2 = 5 - 4\cos(3t)$.
Quelles sont les intersections de Γ avec le cercle unité ? Montrer qu'elles forment un triangle équilatéral et placer Γ par rapport à ce cercle unité. Comment déduire Γ de $\Gamma_1 = \{z(t), t\in[0,\dfrac{\pi}{3}]\}$?
Tracer Γ. O17-C177

40. On munit l'espace E du repère (O,i,j,k).
Caractériser les deux surfaces $S_1 : x^2 + y^2 = 1$ et $S_2 : y^2 + 4z^2 = 1$. Soient $P_1 : x = 2z$ et $P_2 : x = -2z$; montrer que l'intersection C de S_1 et S_2 est exactement la réunion des deux intersections $S_1\cap P_1$ et $S_1\cap P_2$.
Donner les équations de T_1 et T_2, tangentes à C en $A_1(1,0,\dfrac{1}{2})$ et $A_2(2^{-\frac{1}{2}}, 2^{-\frac{1}{2}}, -2^{-\frac{3}{2}})$.
Donner des équations de la perpendiculaire commune à T_1 et T_2. *CCP* O16-C162

41. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(K)$
On définit $\|A\|_\infty = \max\{|a_{i,j}|, (i,j)\in[1,n]^2\}$.
Soit $B = (b_{i,j}), (i,j)\in[1,n]^2$ et AB $= (c_{i,j})$.
Donner l'expression des $c_{i,j}$ en fonction des $a_{i,j}$ et des $b_{i,j}$.
Montrer que $\|AB\|_\infty \leq n\|A\|_\infty\|B\|_\infty$.
Soit T semblable à A.
Montrer que $\dfrac{1}{K}\|T^p\|_\infty \leq \|A^p\|_\infty \leq K\|T^p\|_\infty$, avec $K>0, p\in\mathbb{N}$.
Dans cette question uniquement, on suppose A diagonalisable admettant $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ pour valeurs propres, non nécessairement distinctes.
Montrer que la suite (A^p) converge vers la matrice nulle si et seulement si $\forall i, |\lambda_i| < 1$
On suppose que A a toutes ses valeurs propres de module strictement inférieur à 1 et que la suite $(A^p)_p$ converge vers B.
Montrer que $\mathrm{tr}B = 0$.
Montrer que $B^2 = B$ puis que B=0. O17-C185

42. Soient E un espace vectoriel, $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^n = Id$, et V un sous espace stable par u. Soient p un projecteur tel que $\mathrm{Im}p = V$ et $q = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u^k \circ p \circ u^{n-k}$.
Montrer que $\mathrm{Im}p = \{x \in E,\, p(x) = x\}$
Montrer que $q \circ u = u \circ (\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u^k \circ p \circ u^{n-k})$.
En déduire que $u \circ q = q \circ u$ puis $u^i \circ = q \circ u^i$ pour tout $i \in \mathbb{N}$.
Montrer que $\mathrm{Im}p \circ u^{n-k} \subset V$ pour tout k. En déduire que $\mathrm{Im}q \subset V$. Vérifier que $p \circ q = q$. Montrer que q est un projecteur.
Montrer que $q \circ p = p$
Montrer que $\mathrm{Ker}p$ est un supplémentaire de V stable par u. O17-C187(a6-33)
43. Soient E euclidien et s la symétrie orthogonale par rapport à H, hyperplan de vecteur normal unitaire e. Vérifier que pour tout x, $s(x) = x - 2(x|e)e$.
Soient H_1 et H_2 deux hyperplans, s_1 et s_2 les réflexions orthogonales correspondantes. Montrer que $s_1 \circ s_2(x) = x$ si et seulement si $x \in H_1 \cap H_2$.
Montrer que la somme $H_1^\perp + H_2^\perp$ est directe et stable par $s_1 \circ s_2$.
Soit $B = (e_1, e_1')$ une base orthonormée directe de $\Pi = H_1^\perp \oplus H_2^\perp$. Montrer qu'il existe une unique rotation r de Π telle que $r(e_1) = e_2$. Quel est l'angle de cette rotation ? Donner la matrice de $(s_1 \circ s_2)_{|\Pi}$ dans la base B. O17-C190
44. I) Montrer que $f(P) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n}\left(\int_0^1 t^i P(t)\ \mathrm{d}t\right) X^i$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Montrer que si $P \in \mathrm{Ker}f$, alors $\displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\ \mathrm{d}t = 0$ pour tout $Q \in \mathbb{R}_n[X]$. En déduire que $\mathrm{Ker}f = \{0\}$.
Donner la forme de H, la matrice canoniquement associée à f.
Est-elle inversible ? Diagonalisable ? Répondre sans calculs.
Soit $U \in \mathbb{R}^{n+1}$; montrer que ${}^tUHU = \displaystyle\int_0^1 P^2(t)\ \mathrm{d}t$ où P est un polynôme. A-t-on ${}^tUHU \geq 0$?
Montrer que si ${}^tUHU = 0$, alors $U = 0$.
Montrer que les valeurs propres de H sont strictement positives.
Montrer que la limite de la valeur de la plus petit des valeurs propres tend vers 0 quand $n \to +\infty$ (On pourra utiliser $\mathrm{tr}H$).
CCP O16-C195
45. Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, trouver un équivalent en 0 de f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\big(\ln(1 + x^a)\big)^2}{x^b}$, (on discutera suivant a).
Montrer que $\dfrac{(\ln x)^2}{x^b}$ est intégrable sur $]0, 1]$ si et seulement si $b < 1$.
Représenter dans le plan les couples (a, b) pour lesquels f est intégrable sur $]0, 1]$. O17-C192
46. I) Soit f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et telle que f et f' sont intégrables sur $\mathbb{R}_+$.
Justifier que $f(x) = f(0) + \displaystyle\int_0^x f'(t)\ \mathrm{d}t$ et en déduire que f a une limite en $+\infty$. Montrer que cette limite est nulle.
Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\sin(xt)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{x}f(0) + \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} f'(t)\cos(xt)\ \mathrm{d}t$.
On suppose f'' intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que, quand $x \to +\infty$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\sin(xt)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{x}f(0) + o\big(\frac{1}{x}\big)$.
On ne suppose plus f'' intégrable mais on veut montrer que le résultat persiste. Soit g de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$, montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_a^b g(t)\cos(xt)\ \mathrm{d}t = 0$ et conclure.
CCP O16-C167
47. Montrer que le rayon de convergence de $\displaystyle\sum_n \frac{n!}{1.3\ldots(2n+1)} x^{2n+1}$ vaut $\sqrt{2}$. Soit $f(x)$ la somme de cette série entière sur $]-\sqrt{2}, +\sqrt{2}[$. Montrer que f est solution de $(x^2 - 2)y' + xy + 2 = 0$ et en déduire une expression de f. Convergence de la série en $\sqrt{2}$ O17-C194

48. Étudier les variations de $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
Montrer que l'équation $x = n \ln x$ admet deux solutions réelles ; on note u_n la plus petite et v_n la plus grande.
Étudier le signe de $f(n) - \dfrac{1}{n}$ et en déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
Montrer que $\ln n = \ln v_n - \ln(\ln v_n)$ puis montrer qu'en $+\infty$, $v_n \sim n \ln n$; en déduire la nature de $\sum \dfrac{1}{v_n^2}$ et $\sum \dfrac{1}{\sqrt{v_n}}$.
Déterminer la nature de $\sum \dfrac{1}{v_n}$.
Montrer que f induit une bijection h de $]0, \mathrm{e}[$ dans $]-\infty, \dfrac{1}{\mathrm{e}}[$ puis, après avoir justifié que h^{-1} est dérivable, calculer $(h^{-1})'(0)$.
Montrer que (u_n) converge et donner sa limite l ainsi qu'un équivalent de $u_n - l$. O17-C196

49. Donner un polynôme annulateur de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = -A$, puis montrer que A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.
Quelles sont les valeurs propres possibles de A ?
En utilisant $\mathrm{tr}A \in \mathbb{R}$, montrer que $\mathrm{tr}A = 0$ et en déduire que $\mathrm{rg}A = 2p$. Pour $k \in \mathbb{N}$, calculer $\mathrm{tr}(A^k)$ en fonction de p.
Déterminer le rayon de convergence de $\sum \mathrm{tr}(A^k) x^k$ et calculer sa somme. O17-C197

50. Justifier la convergence de $\sum \dfrac{(-1)^n}{n+a+1}$ pour $a > -1$.
Déterminer un équivalent en $+\infty$ et 0 de $f_r(x) = \dfrac{x^{r-1}}{1+x}$ puis étudier l'intégrabilité de f_r sur $\mathbb{R}_+^\star$.
Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{-r}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} \frac{x^{r-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x$.
Montrer que $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} \int_0^1 \frac{t^{-r}}{1+t}\,\mathrm{d}t - \sum_{n=0}^{p} \frac{(-1)^n}{n+a+1} = 0$ si $a \in]-1, 0[$.
Donner une expression simple de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 0$. O17-C198

51. I) Soit $f(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^{2n}$ où $a_n = \dfrac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2}$.
   (a) Montrer que f est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que f vérifie $tf''(t) + f'(t) + tf(t) = 0$.
   (c) On pose $g(t) = (f(t))^2 + (f'(t))^2$. Etudier les variations de g.
   Montrer que f et f' sont bornées sur $\mathbb{R}$.
   (d) Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que F est définie et $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (e) Montrer que F vérifie une équation différentielle d'ordre 1 et en déduire F.

   II) Soit E de dimension finie et f, g deux endomorphismes de E.
   $f \circ g$ admet λ pour valeur propre. Montrer que $g \circ f$ admet λ pour valeur propre. O17-911

52. Montrer que $u(x) = \exp\big(-\dfrac{x^2}{2}\big)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1.
Montrer que u est solution d'une équation de la forme :
$y^{(n+1)} + xy^{(n)} + ny^{(n-1)} = 0$.
On pose $H_n(x) = (-1)^n \exp\big(\dfrac{x^2}{2}\big) u^{(n)}(x)$; calculer H_0 et H_1, puis montrer que $H_{n+1}(x) = xH_n(x) - nH_{n-1}(x)$.
Montrer que H_n est un polynôme de degré n et calculer son coefficient dominant.
Montrer que $\phi(P, Q) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\big(-\frac{x^2}{2}\big) P(x) Q(x)\,\mathrm{d}x$ definit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ et montrer que $\phi(P, H_n) = \phi(P', H_{n-1})$.

Déterminer une BON de $\mathbb{R}[X]$ pour ce produit scalaire.
Bar O16-174

53. I) On considère la série entière de terme général $u_n(z) = \dfrac{n^n z^n}{n!}, n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Montrer que $\forall x > 0, \quad \ln(1+x) < x$.
   (b) Trouver $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ puis en déduire le rayon de convergence de la série $\sum u_n$.
   (c) Soit $A_n = \dfrac{n^n e^{-n}}{n!}$.
   Montrer que $A_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{K}{\sqrt{n}}$, où K est une constante à déterminer.
   Montrer que la suite (A_n) est monotone et donner son sens de variation.
   (d) Etudier la convergence de $\sum u_n(z)$ lorsque $z \in \{e^{-1}, -e^{-1}\}$ puis lorsque $z \in \{ie^{-1}, -ie^{-1}\}$.
   II) Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension 3 et f un endomorphisme non nul de E tel que $f \circ f = 0$.
   Déterminer les dimensions respectives de $\ker f$ et $\mathrm{Im} f$.
   Montrer qu'il existe une base B de E dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. *Zun* O17-912

54. I) (O16-174)
   II) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tA = A$ et $A^3 - 3A + 2I_n = 0$.
   Montrer que A est diagonalisable.
   Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\det A = (-2)^k$.
   Soit $G_k = \sum\limits_{j=0}^{k} A^j$. Montrer que G_k est diagonalisable et que G_k est inversible. *Sol* O17-913

55. I) Pour $t \in]-1,1[\setminus\{0\}$ et $x \in]-1,0]$, on pose $f_x(t) = \dfrac{1-(1-t)^x}{t}$ et $f_x(0) = x$.
   (a) Montrer que f est continue en 0.
   Trouver un équivalent de f en 1.
   (b) En déduire que $\displaystyle\int_0^1 f_x(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
   (c) Donner un développement de f en série entière.
   (d) Soit $w_n = \left|\dfrac{x(x-1)...(x-(n-1))}{n.n!}\right|$ et $a_n = \ln(n^{2+x}.w_n)$.
   Montrer que $a_{n+1} - a_n = O(1/n^2)$.
   En déduire qu'il existe $K \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $w_n \sim \dfrac{K}{n^{2+x}}$.
   (e) ? ?
   II) Soit $\varphi : M \mapsto \mathrm{tr}(A)M - \mathrm{tr}(M)A$ avec $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ fixée et $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
   Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Etudier les sous-espaces propres et les valeurs propres.
   Vit O17-914

56. I) Soit E l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^{3?,\infty?}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $x^2y" - 4xy' + 6y = 0$.
   (a) Montrer que E est un espace vectoriel.
   (b) Trouver les solutions polynômiales.
   (c) Soit $f \in E$ et $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$.
   Montrer que $f(0) = f'(0) = 0$.
   Montrer que g a une limite en 0. Désormais, g est prolongée par continuité.
   Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et calculer $g"$.
   (d) En déduire la dimension de E et une base de E.
   II) $A = \begin{pmatrix} -7 & -12 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?
   Pour quelle(s) valeur(s) de $a \in \mathbb{R}$, $U = \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}$ est-il vecteur propre de A ? Soit $P = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, clairement inversible. Dire, sans calcul, à quoi ressemble $P^{-1}AP$. Donner la première colonne de cette matrice. *Kei* O17-915