1. I Soit (E) $\quad xy" - y' - 4x^3y = 0$.
   i. Soit $y : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ et $z(t) = y(\sqrt{t})$. Trouver l'équation différentielle dont z est solution si et seulement si y est solution de (E).
   En déduire les solutions y sur $\mathbb{R}_+^*$.
   ii. On pose $H : \mathbb{R}_-^* \to \mathbb{R}$ définie par $H(t) = \mathrm{ch}(t^2)$. Montrer que H est solution de (E).
   iii. On pose $U = \dfrac{y}{H}$. En utilisant ce changement de fonction, déterminer les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_-^*$.
   iv. Expliciter les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

   II Déterminer tous les nombres complexes u tels que $|u| = |1+u| = 1$.

   IIbis Soit E un espace euclidien et f un endomorphisme orthogonal. Montrer que $\ker(f - Id_E)$ et $\mathrm{Im}(f - Id_E)$ sont supplémentaires orthogonaux.

   CCP-Guig-LeBl O16-900

2. I Soit $f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)}$.
   i. Prouver que f est définie sur $D =]0,1[\cup]1,+\infty[$.
   ii. Prouver que f est $\mathcal{C}^1$ sur D et que $f'(x) = \dfrac{(x-1)}{\ln x}$.
   iii. a- Prouver que $f(x) = \displaystyle\int_{\ln x}^{2\ln x} \frac{\exp t \ \mathrm{d}t}{t}$.
   b- Prouver que, si $x > 1$, alors $x\ln 2 \leq f(x) \leq x^2 \ln 2$. Trouver une inégalité analogue pour $0 < x < 1$.
   c- En déduire $\lim\limits_{0} f, \lim\limits_{1} f, \lim\limits_{+\infty} f$.
   d- Sachant que la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\ln t}$ est décroissante, trouver $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{f(x)}{x}\right)$.
   e- Représenter la fonction f.

   II Soit f, endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie, tel que $f^3 = 2f^2$. Prouver que $\mathrm{tr}(f)$ est un entier pair.

   CCP-Thom O16-901

3. I) Soit $(E) : y' - y = \exp(-x^2)$ et $u(x) = \displaystyle\int_0^x \exp(-t^2 - t)\ \mathrm{d}t$ pour $x \in \mathbb{R}$.
   (a) Déterminer les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ et les exprimer en fonction de u.
   (b) Montrer que $f : x \mapsto \exp(-x^2 - x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et en déduire que u a des limites en $+\infty$ et $-\infty$.
   (c) Montrer que toutes les solutions de (E) tendent vers 0 en $-\infty$.
   (d) Montrer qu'il existe une solution et une seule qui tend vers 0 en $+\infty$.
   (e) Déterminer la forme des solutions de $(E') : y' + y = \exp(-x^2)$ à partir de celles de (E).

   II) Trouver toutes les rotations vectorielles du plan ayant pour polynôme annulateur $X^3 + X^2 - X - 1$.
   II-bis) Soit E un espace vectoriel euclidien et f un endomorphisme orthogonal de E. Montrer que f est une symétrie orthogonale si et seulement si f est diagonalisable. *CCP-Bourg-Migu* O16-902

4. I) Soit M une matrice carrée d'ordre n vérifiant la relation $M^2 + M + I_n = 0$ et A une matrice carrée d'ordre n telle que $A^2 = M$.
   (a) Montrer que M est inversible.
   (b) i. Montrer que M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et que le spectre complexe de M est inclus dans $\{j, \bar{j}\}$.
   ii. Montrer que M n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   iii. Soit $P_M(X) = \det(M - XI_n)$. Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $P_M(X) = (-1)^n(X-j)^p(X-\bar{j})^p$. En déduire que $\mathrm{sp}_{\mathbb{C}}(M) = \{j, \bar{j}\}$.
   (c) Montrer que n est pair. Calculer la trace et le déterminant de M.
   (d) A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?
   (e) On suppose que $n/2$ est impair. Montrer que la trace de A est un entier relatif impair.

II) Soit (u_n) une suite décroissante, réelle, positive, telle que $\dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n} \sim \dfrac{1}{n}$.
Montrer que $\lim u_n = 0$; trouver un équivalent de u_n. *CCP-Duca* O16-903

5. I) Soit la suite (u_n) définie par $u_0 \in]0, +\infty[$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = (au_n + b)^{1/2}$ avec $a > 0$ et $b \geq 0$..
   (a) On suppose $b = 0$.
      i. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = a\left(\dfrac{u_0}{a}\right)^{1/(2^n)}$.
      ii. Montrer que (u_n) converge vers a.
      iii. Nature de $\sum 2^n(u_n - a)$?
   (b) On suppose $b > 0$ et on note $a^* = \dfrac{a + (a^2 + 4b)^{1/2}}{2}$.
      i. Montrer que si (u_n) converge, alors elle converge vers a^*.
      ii. Montrer que (u_n) converge vers a^*.
      iii. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - a^*| \leq \dfrac{a}{2\min(a^*, u_{n+1})}|u_n - a^*|$. En déduire la nature de $\sum 2^n(u_n - a^*)$.

   II) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A^2$ et $\mathrm{tr}A = n$.
   Donner le spectre de A, son polynôme caractéristique, et prouver que $A = I_n$. *CCP-Borg-Bert* O16-904

6. I) Soit $r \in]0, 1[$ et $S_r(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r^n \sin(nx)}{n}$
   (a) Montrer que S_r est définie sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est $2\pi-$périodique.
   (b) Montrer que S_r est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer $S_r'(x)$. S_r est-elle égale à la somme de sa série de Fourier ?
   (c) Montrer que $S_r(x) = \arctan\left(\dfrac{r\sin x}{1 - r\cos x}\right)$.
   (d) Calculer les coefficients de Fourier de S_r.
   (e) Montrer que $\displaystyle\int_0^\pi \left(\arctan\left(\frac{r\sin x}{1 - r\cos x}\right)\right)^2 \,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{r^{2n}}{n^2}$. En déduire que $\dfrac{\pi^2}{6} = \displaystyle\sum_1^{+\infty}\frac{1}{n^2}$.

   II) Dans $\mathbb{R}^2$ euclidien, trouver la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur le plan d'équation $x + y - z = 0$. *CCP-Soub* O16-905

7. I (avec préparation)
   Soit u une fonction $2\pi-$périodique telle que $u(x) = x$ si $x \in [-\pi, \pi[$.
      i. Donner l'allure du graphe de u.
      ii. Calculer $\displaystyle\int_0^\pi u(x)\sin nx \,\mathrm{d}x$.
      iii. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
      iv. Soit $f_p(x) = \dfrac{x^{2p+1}\ln x}{x - 1}$ définie sur $]0, 1[$.
         A. Prolonger f_p par continuité en 0 et 1.
         B. Soit la suite (I_p) définie par $I_p = \displaystyle\int_0^1 f_p(x)\,\mathrm{d}x$. Calculer $I_{p+1} - I_p$.
         C. En déduire I_0.
      v. Etudier la convergence de $\sum I_p$ et $\sum(-1)^p I_p$ et calculer leur somme si possible.

   II (sans préparation) ?
   CCP-Grab O16-906

8. I (avec préparation)
   On pose $I_n =]n\pi, (n + 1)\pi[$.
      i. Domaine de définition de cotan ? limite en 0_+ et en π_- ?
      ii. Montrer que $f : x \mapsto \mathrm{cotan}x - x$ est strictement monotone sur I_n.
      iii. Montrer qu'il existe un unique $r_n \in In$ tel que $\mathrm{cotan}r_n = r_n$. Montrer que $r_n < n\pi + \pi/2$.

iv. Montrer que $r_n \underset{+\infty}{\sim} n\pi$.

v. Montrer que $r_n = n\pi + \arctan \dfrac{1}{r_n}$. En déduire que $r_n = n\pi + \dfrac{1}{n\pi} + o\left(\dfrac{1}{n\pi}\right)$.

vi. Convergence des séries $\sum (r_n - n\pi)$ et $\sum (-1)^n (r_n - n\pi)$.

vii. Trouver $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $r_n = n\pi + \dfrac{1}{n\pi} + \dfrac{\alpha}{n^3} + o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$.

II (sans préparation) Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 2$, $\alpha \in \mathbb{R}, a \in E$.
Soit $\phi \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\forall x \in E, \quad \phi(x) = x + \alpha(x.a)a$.
Montrer que ϕ est symétrique.
Valeurs propres et sous-espaces propres de ϕ.

II bis (sans préparation) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose $(A +^t A)$ nilpotente. Prouver que A est antisymétrique.

CCP-Jeauf O16-907

9. I (avec préparation)
f est une fonction $2\pi-$périodique, continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
$\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $(E) : y' + \alpha y = f$.

i. Montrer que toutes les solutions de (E) sont les $y_C : t \mapsto \left(C + \displaystyle\int_0^t e^{\alpha u} f(u)\ \mathrm{d}u\right) e^{-\alpha t}$, C décrivant $\mathbb{R}$.

ii. Trouver K, indépendant de C et t tel que $y_C(t+2\pi) - y_C(t) = e^{-\alpha(t+2\pi)}\left(C(1-e^{\alpha 2\pi}) + K\right)$. K s'exprime en fonction d'une intégrale.

iii. Montrer qu'il existe une unique solution de (E) $2\pi-$périodique ; on la note ϕ.

iv. ϕ est-elle la somme de sa série de Fourier ?

v. Exprimer les coefficients de Fourier $c_n(f)$ en fonction des coefficients de Fourier $c_n(\phi)$.

vi. A. Montrer que $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t + \pi/n) e^{-int}\ \mathrm{d}t = -\int_0^{2\pi} f(t) e^{-int}\ \mathrm{d}t$.

B. ?

II (sans préparation) $\begin{cases} x' = \dfrac{1}{3}(-x + 2y + 2z + 4) \\ y' = \dfrac{1}{3}(2x - y + 2z + 2) \\ x' = \dfrac{1}{3}(2x + 2y - z + 4) \end{cases}$.

Quelle est la nature de l'application qui à (x, y, z) associe (x', y', z') ?

CCP-Jeauf O16-908

10. I (avec préparation)
$f = t \mapsto \displaystyle\sum_0^{+\infty} \frac{e^{-nt^2}}{n^2+1}$.

i. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

ii. Démontrer que $\lim\limits_{+\infty} f = 1$.

iii. Soit $u_n(t) = \dfrac{e^{-nt^2}}{n^2+1}$. Etudier les variations de u_n' sur $[0, +\infty[$. Chercher $\|u_n'\| = \sup\limits_{t \in \mathbb{R}} |u_n'(t)|$.
Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

iv. ?

II (sans préparation) Soit f un endomorphisme orthogonal. Montrer que $\ker(f - Id) - (\mathrm{Im}(f - Id))^{\perp}$.

CCP-Jeauf O16-909

11. I (avec préparation)
Soit $I = \displaystyle\iint_D f(x,y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$, $f(x,y) = \dfrac{1}{(1+x^2+y^2)^2}$ et $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2 \leq 1, x \leq x^2+y^2, -x \leq x^2+y^2\}$.

i. Représentation graphique de D.

ii. Calcul de $K = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\cos^2\theta}\ \mathrm{d}\theta$. On pourra poser $t = \tan\theta$.

iii. Montrer que $I = 4\iint_{\Delta} f(x,y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$ avec $\Delta = D \cap (\mathbb{R}_+)^2$.

iv. Calculer I.

II (sans préparation) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

A est-elle diagonalisable ? Quelles sont ses valeurs propres ? Combien de solutions a l'équation $M^2 = A$, avec $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$?

CCP-Jeauf O16-910

12. I) Montrer que $S \in \Sigma_n$, ensemble des matrices symétriques de valeurs propres strictement positives, est inversible et que $S^{-1} \in \Sigma_n$.

Montrer que $f(x) = -\ln x$ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$ et en déduire que $(\det S)^{\frac{1}{n}} \leq \dfrac{1}{n}\mathrm{tr}(S)$.

Soient S et T deux matrices de Σ_n ayant le même polynôme caractéristique ; montrer qu'il existe H symétrique telle que $S = H^2$. Montrer qu'il existe R orthogonale telle que $T =^t RSR$.

On donne une matrice M inversible ; montrer que ${}^tMM \in \Sigma_n$.

Deux questions oubliées, la dernière portant sur un inf...(Sans doute : prouver que $\inf\limits_{X\neq 0} \dfrac{{}^tXSX}{{}^tXX} = \min(sp(S))$)

II) Convergence simple de la série de fonctions $f_n(x) = \dfrac{1}{n+n^3x^2}$.

Convergence normale de cette série sur $[A,+\infty[$ avec $A > 0$.

Que peut-on en déduire sur la somme de la série ? *CCP* O16-C161

13. On munit l'espace E du repère (O,i,j,k).

Caractériser les deux surfaces $S_1 : x^2+y^2 = 1$ et $S_2 : y^2+4z^2 = 1$. Soient $P_1 : x = 2z$ et $P_2 : x = -2z$; montrer que l'intersection C de S_1 et S_2 est exactement la réunion des deux intersections $S_1 \cap P_1$ et $S_1 \cap P_2$.

Donner les équations de T_1 et T_2, tangentes à C en $A_1(1,0,\dfrac{1}{2})$ et $A_2(2^{-\frac{1}{2}}, 2^{-\frac{1}{2}}, -2^{-\frac{3}{2}})$.

Donner des équations de la perpendiculaire commune à T_1 et T_2. *CCP* O16-C162

14. I) Soit une série à termes positifs u_n telle que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \dfrac{a}{n} + o\Big(\dfrac{1}{n}\Big)$ où $a > 1$.

On note $v_n = \dfrac{1}{n^b}$ avec $b \in]1,a[$; montrer que $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = 1 - \dfrac{b}{n} + o\Big(\dfrac{1}{n}\Big)$. Montrer que $\exists N \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \geq N$, $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} \geq \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

Montrer que $\sum u_n$ converge.

Soit $w_0 > 0$ et $w_n = \prod\limits_{k=1}^{n} \dfrac{k+a}{k+b}$ pour $a > 0$, $b > 0$, $b - a > 1$.

Montrer que $\sum w_n$ converge.

Étudier la suite de terme général $(n+b-1)w_n$ (on pourra poser $a_n = ln[(n+b-1)w_n]$ et étudier la suite $a_{n+1} - a_n$).

II) Donner le reste de la division euclidienne de $X^{2n} + X^n + 1$ par $X^2 + X + 1$. *CCP* O16-C163

15. I) Donner le noyau et l'image de l'application ϕ définie sur E, euclidien orienté de dimension 3, par $\phi(x) = a \wedge x$ où a est un vecteur unitaire de E. Montrer qu'elle admet une unique valeur propre et trouver le sous-espace propre associé.

Montrer que $a \wedge (a \wedge x) = (a|x)a - x$ et en déduire que $\phi^3 = -\phi$.

Montrer que f défini par $f(x) = x + t\phi(x)$ est un automorphisme de E et trouver un polynôme annulateur de f. f est-il diagonalisable ?

II) Montrer que $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^5 \ln t}{(1+t^6)^2}\, \mathrm{d}t$ existe, puis que $I = 0$. *CCP* O16-C164

16. I) Donner la valeur de $b_n(f)$ quand f est continue sur $\mathbb{R}$, paire et 2π-périodique. On notera E l'espace vectoriel de ces fonctions.

g définie par $g(t) = \left|\sin \dfrac{t}{2}\right|$ est-elle dans E ?

On admet que $a_n(g) = \dfrac{-4}{\pi(4n^2-1)}$.

On suppose $\exists p \in \mathbb{N}^*$, $a_p(f) \neq 0$ et $n \neq p \Rightarrow a_n(f) = 0$; pour $\phi(x) = f(x) - a_p(f)\cos(px)$, calculer $a_n(\phi)$ et $b_n(\phi)$. Montrer, à l'aide de la formule de Parseval, que $f(x) = a_p(f)\cos(px)$.

Soit G définie sur E par $G(f)(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} g(x-t)f(t)\ \mathrm{d}t$; $G(f)$ est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Montrer que G est un endomorphisme de E.
Montrer que $a_n\big(G(f)\big) = \dfrac{1}{2}a_n(f)a_n(g)$.
Trouver les valeurs et sous-espaces propres de G.

II) Déterminer de deux manières différentes la limite de la suite de terme général $u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} 2^{\frac{k}{n}}$. *CCP* O16-C165

17. I) À $M \in \mathbb{C}$, d'affixe $z = \mathrm{e}^{i\theta}$, on associe M' d'affixe $z' = 1 + z + z^2$.
Montrer que $z' = (1 + 2\cos\theta)\mathrm{e}^{i\theta}$. Donner un argument de z' et son module. Montrer que O, M et M' sont alignés.
Montrer que $\Gamma = \{z'/|z| = 1\}$ est donné par $\rho = 1 + 2\cos\theta$.
Tracer Γ et donner les points à tangente horizontale puis verticale.
Donner la longueur de Γ en fonction de $\displaystyle\int_0^{\pi} \sqrt{5 + 4\cos\theta}\ \mathrm{d}\theta$.
II) Quelles sont les valeurs propres possibles de $p \in \mathcal{L}(E)$, tel que $p \circ p$ soit un projecteur, E étant un espace de dimension finie ?
Montrer que p est diagonalisable et que $p^3 = p$. *CCP* O16-C166

18. I) Soit f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et telle que f et f' sont intégrables sur $\mathbb{R}_+$.
Justifier que $f(x) = f(0) + \displaystyle\int_0^x f'(t)\ \mathrm{d}t$ et en déduire que f a une limite en $+\infty$. Montrer que cette limite est nulle.
Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\sin(xt)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{x}f(0) + \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} f'(t)\cos(xt)\ \mathrm{d}t$.
On suppose f'' intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que, quand $x \to +\infty$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\sin(xt)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{x}f(0) + o\Big(\frac{1}{x}\Big)$.
On ne suppose plus f'' intégrable mais on veut montrer que le résultat persiste. Soit g de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$, montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_a^b g(t)\cos(xt)\ \ \mathrm{d}t = 0$ et conclure.
II) Soit E un espace euclidien et p, q deux projecteurs orthogonaux de E. Montrer que $p \circ q = 0$ implique $q \circ p = 0$. *CCP* O16-C167

19. I) Pour $a \geq 0$, on pose $u_0(a) = a$ et $u_{n+1}(a) = \ln\big(1 + u_n(a)\big)$.
Montrer que $x - \dfrac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$ pour tout $x \geq 0$.
Montrer que la suite $\big(u_n(a)\big)$ est bien définie et qu'elle est à termes positifs. Montrer ensuite qu'elle converge vers 0.
Montrer que, pour tout n, $u_n(1) \geq \dfrac{1}{n+1}$.
Pour $a \geq 1$, quelle est la nature de $\sum u_n(a)$?
Pour $a \geq 0$, quelle est la nature de $\sum u_n(a)$?
II) Donner la matrice canoniquement associée au projecteur de $\mathbb{R}^3$ sur $P : x + y + z = 0$ parallèlement à $D : x = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{3}\cdot$ *CCP* O16-C168

20. I) Pour $J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, calculer J^2 et en déduire que J n'est pas inversible. Calculer son polynôme caractéristique ; est-elle diagonalisable ? Si oui, on notera P la matrice de passage vers la base de vecteurs propres.
Montrer que $P^{-1}(aI_3 + bJ)P$ est diagonale et donner ses valeurs propres.
Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = I_3 + (-1 + \mathrm{e}^x)J$ et $G(x) = I_3 - (1 + \mathrm{e}^x)J$; montrer que $F(x)F(y) = F(x+y)$; F est-elle inversible ?
Calculer $G(x)G(y)$; G est-elle inversible ?
Montrer que si $M_{a,b} = aI_3 + bJ$ est inversible, $\exists x \in \mathbb{R}$, $M_{a,b} = aF(x)$ ou $M_{a,b} = aG(x)$; calculer alors $M_{a,b}^{-1}$ en fonction de a et b.

Montrer que $C(a,b) = \{A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\ AM_{a,b} = M_{a,b}A\}$ est un espace vectoriel dont on donnera la dimension.

II) Déterminer les extrema de $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$. *CCP* O16-C169

21. I) Pour $s > 0$, montrer la convergence de $\Gamma(s) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}t^{s-1}\ \mathrm{d}t$ et $I_n(s) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-nt}t^{s-1}\ \mathrm{d}t$ $(n \geq 1)$.

Montrer que $I_n(s) = \dfrac{\Gamma(s)}{n^s}\cdot$

Montrer que :

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k I_{2k+1}(s) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}t^{s-1}\ \mathrm{d}t}{1+\mathrm{e}^{-2t}} + (-1)^n \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-(2n+3)t}t^{s-1}\ \mathrm{d}t}{1+\mathrm{e}^{-2t}}\cdot$$

Montrer que $\sum \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)^s}$ converge.

Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-(2n+3)t}t^{s-1}}{1+\mathrm{e}^{-2t}}\ \mathrm{d}t = 0$.

En déduire $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{\operatorname{ch} t}\ \mathrm{d}t$ sous la forme d'une série.

II) Trouver $k \in \mathbb{R}^*$ pour que l'équation $P''(X^3) = kP'(X^2)$ ait une solution telle que $P' \neq 0$, dans $\mathbb{C}[X]$, puis résoudre l'équation. *CCP* O16-C170

22. I) Pour $a \in \mathbb{R}$, montrer que Ω_a defini par $\Omega_a(f) = \dfrac{\partial f}{\partial x} + a\dfrac{\partial f}{\partial y}$ est un endomorphisme de l'espace V des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

Soit $f \in V$. Montrer qu'il existe $F \in V$ unique, tel que, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = F(x, y - ax)$.

Calculer les dérivées partielles de F en fonction de celles de f.

En déduire $\operatorname{Ker}(\Omega_a)$ en fonction des dérivées partielles de f.

Calculer $\operatorname{Ker}(\Omega_a \circ \Omega_a)$. Exprimer $\Omega_a^2 = \Omega_a \circ \Omega_a$ et Ω_a^3 en fonction des dérivées successives de f. Faire une hypothèse sur Ω_a^n. La démontrer.

II) Dans $\mathbb{R}^3$ euclidien, donner la matrice canoniquement associée au projecteur orthogonal sur $\mathbb{R}u$ où $u = (a,b,c)$ est unitaire.

Donner les éléments propres de $A = \begin{pmatrix} a^2+1 & ab & ac \\ ab & b^2+1 & bc \\ ac & bc & c^2+1 \end{pmatrix}$. *CCP* O16-C171

23. II) Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in GL(E)$ tel que f^2 soit diagonalisable. Montrer que f est diagonalisable. *CCP* O16-C172

24. I) Soit $n \geq 2$ et $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{it^n}\ \mathrm{d}t$, $S_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t^n)\ \mathrm{d}t$ et pour $x > 0$, $\varphi_n(x) = (\mathrm{e}^{ix}-1)x^{\frac{1}{n}-1}$, $\Psi_n(x) == (\mathrm{e}^{ix}-1)x^{\frac{1}{n}-2}$.

Montrer que, pour $x > 0$, $|\mathrm{e}^{ix} - 1| \leq 2$ et $|\mathrm{e}^{ix} - 1| \leq x$.

Donner les limites de φ_n en $+\infty$ et en 0.

Montrer que Ψ_n est intégrable sur $]0, +\infty[$.

Montrer que :

$$\int_a^b \mathrm{e}^{it^n}\ \mathrm{d}t = -\frac{i}{n}\big(\varphi_n(b^n) - \varphi_n(a^n)\big) + \frac{i}{n}\left(\frac{1}{n} - 1\right)\int_{a^n}^{b^n} \Psi_n(x)\ \mathrm{d}x.$$

En déduire que I_n existe et donner sa valeur.

Montrer que S_n existe et en donner un équivalent de la forme $S_n \sim \dfrac{A}{n}$ où A est une constante à préciser.

II) Montrer que $G = \left\{ A(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{t^2}{2} & 1 & t \\ t & 0 & 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$ est un groupe pour le produit matriciel.

Que faudrait-il pour avoir un anneau ? Est-ce le cas ? *CCP* O16-C173

25. I) Montrer que $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{ix(1+t^2)}}{1+t^2}\ \mathrm{d}t$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Montrer que que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ $f'(x) = i\dfrac{\mathrm{e}^{ix}}{2\sqrt{x}}\varphi(x)$ où $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{e}^{iy}}{\sqrt{y}}\ \mathrm{d}y$;

$f(x) = \dfrac{1}{4}(i\varphi(x)^2 + \pi)$.
Montrer que $f(x) = \dfrac{e^{ix}}{2}\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{ixu}}{\sqrt{u}(1+u)}\,du$.
À l'aide d'une intégration par parties montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.
II) Soit A carrée d'ordre n à coefficients complexes.
Déterminer le polynôme caractéristique de la matrice définie par $B = \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ A & 0_n \end{pmatrix}$ en fonction de celui de A.
CCP O16-C174

26. I) Donner le développement en série entière de $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C} \setminus \{-3\}$ définie par $f(z) = \dfrac{3z}{z+3}$ au voisinage de 0.
Préciser le rayon de convergence.
Pour $\theta \in \mathbb{R}$, montrer que la série de Fourier de $g(\theta) = \dfrac{\sin\theta}{5 + 2cos\theta}$ converge normalement.
F désignant la partie imaginaire de f, montrer qu'il existe une constante A telle que $g(\theta) = AF\left(e^{i\theta}\right)$.
Montrer que g peut s'écrire $g(\theta) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(n\theta)$.
Calculer $I_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} g(\theta)\sin(n\theta)\,d\theta$ et la série de Fourier de g. Calculer $I = \displaystyle\int_0^{2\pi/3} g(\theta)\,d\theta$ et en déduire une somme de série à préciser.
II) On munit $\mathcal{C}([0,\pi],\mathbb{R})$ du produit scalaire $(f|g) = \displaystyle\int_0^{\pi} f(t)g(t)\,dt$.
Calculer $(\sin|\cos)$. Déterminer $\inf\limits_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \displaystyle\int_0^{\pi} (a\cos t + b\sin t - t)^2\,dt$.
CCP O16-C175

27. I) Soit E l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ vérifiant $\forall x > 0, \forall y > 0,\ f\left(\dfrac{2xy}{x+y}\right) = \dfrac{f(x)+f(y)}{2}$.
Vérifier que, pour $f \in E$, $\dfrac{2x^2}{(x+y)^2} f'\left(\dfrac{2xy}{x+y}\right) = \dfrac{f'(y)}{2}$.
Soit $f \in E$ et $A > 0$. Pour $t > 0$, étudier l'existence d'un unique $x > 0$ tel que $\dfrac{2xA}{x+A} = t$ et prouver qu'alors $t^2 f'(t) = A^2 f'(A)$.
Montrer que $t \mapsto t^2 f'(t)$ est constante.
Déterminer l'ensemble E.
Déterminer l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant $\forall x > 0, \forall y > 0,\ f\left(\dfrac{x+y}{2}\right) = \dfrac{f(x)+f(y)}{2}$.
II) Soit E de dimension n, f, g deux endomorphismes de E tels que $f + g = Id_E$ et $\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) \leq n$.
Montrer que $\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) = n$. Montrer que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(g)$ et $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(g)$. Montrer que f et g sont des projecteurs.
CCP O16-C176

28. I) Soit a, b, c des réels. Montrer que φ, défini sur $\mathbb{R}_n[X]$ par :
$\varphi(P) = aP(X+2) + bP(X+1) + cP(X)$ est un endomorphisme.
Montrer que la matrice de φ dans la base canonique est triangulaire et en déduire que φ est bijectif si, et seulement si, $a + b + c = 0$.
Montrer que pour $\forall (t,h) \in \mathbb{R}^2$, $P(t+h) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!} P^{(k)}(t)$ (on pourra utiliser la formule de Taylor).
Montrer que $\varphi(P) = (a+b+c)P(X) + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{2^k a + b}{k!} P^{(k)}(X)$.
Montrer que $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ si, et seulement si, $a + b + c = 0$ et $2a + b \neq 0$.
II) Pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, montrer la convergence de la série de terme général $u_n = \ln\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)$ et calculer $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} u_n$ (on simplifiera $\displaystyle\sum_{n=2}^{p} \ln(n+1) + \ln(n-1) - 2\ln n$).

CCP O16-C177

29. I) Soit $E = \{f \in C([a,b],\mathbb{R}),\ \forall n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\int_a^b t^n f(t)\ \mathrm{d}t = 0\}$.

Soit $f \in E$ et $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que $\displaystyle\int_a^b P(t)f(t)\ \mathrm{d}t = 0$.

Montrer que, pour tout g continue sur $[a,b]$, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $t \in [a,b]$, $|g(t) - Q(t)| < \varepsilon$.

Montrer que $\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\ \mathrm{d}t = 0$. Montrer que $f = 0$.

II) Montrer que pour tout p projecteur de E, $E = \mathrm{Ker}p \oplus \mathrm{Im}p$.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $E = \mathrm{Ker}f \oplus \mathrm{Im}f$. f est-il un projecteur ?

CCP O16-C178

30. I) Montrer que la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{\dbinom{n+p}{n}}$ diverge pour $p = 0$ et $p = 1$.

Montrer que, pour $p \geq 2$, $(n+p+1)u_{n+1} = (n+1)u_n$ et en déduire que $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{1}{p-1}(1-(n+1)u_n)$.

Montrer que la suite de terme général $v_n = (n+1)u_n$ est décroissante et en déduire que $\sum u_n$ converge.

Montrer que (v_n) tend vers 0 et en déduire la somme de la série des u_n.

II) Montrer que f de rang 1 dans un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, est diagonalisable si et seulement si sa trace est non nulle. Donner les puissances de f. Caractériser $g = \dfrac{1}{\mathrm{tr}f}f$.

CCP O16-C179

31. I) Soit $u_0 \in]0,1[$, $u_{n+1} = f(u_n)$, où $f(x) = \displaystyle\int_0^1 |x - t|\ \mathrm{d}t$.

Montrer que pour $x \in [0,1]$, $f(x) = x^2 - x + \dfrac{1}{2}\cdot$

Déterminer la valeur de $f(x)$ quand $x < 0$ puis quand $x > 1$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0,1[$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2}]$.

Calculer la dérivée de f et la majorer en valeur absolue.

En déduire que $(u_n)_n$ converge vers une limite ℓ que l'on calculera.

Que se passe-t-il quand $u_0 \geq 1$?

II) Montrer que $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ non nulle et vérifiant $A^3 = -A$, est semblable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$.

CCP O16-C180

32. I) Montrer la décroissance de $f(t) = \dfrac{\ln t}{t}\cdot$

Soit $u_n = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{\ln p}{p} - \frac{(\ln n)^2}{2}\cdot$

Montrer que $u_{n+1} - u_n = f(n+1) - \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{\ln t}{t}\ \mathrm{d}t$.

En déduire la monotonie de (u_n).

Montrer que $u_n + \dfrac{(\ln n)^2}{2} \geq \displaystyle\int_3^{n+1} \frac{\ln t}{t}\ \mathrm{d}t$.

En déduire que (u_n) converge.

II) Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$, vérifiant $f^2 \neq 0$ et $f^3 = 0$.

Montrer qu'il existe $x \in \mathbb{R}^3$ tel que $\big(x, f(x), f^2(x)\big)$ soit une base de $\mathbb{R}^3$, et que $Vect\big(f(x), f^2(x)\big)$ est stable par f.

CCP O16-C181

33. I) Soit f une fonction continue sur $[a,b]$, avec $a < b$. On définit sur $[a,b]$ une suite d'applications (f_n) par $f_0 = f$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in [a,b]$, $f_{n+1}(x) = \displaystyle\int_a^x f_n(t)\ \mathrm{d}t$.

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^n$.
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x)| \leq \dfrac{(x-a)^n}{n!}\|f\|_\infty$.
Soit $g_n(x) = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} f_k(x)$. Montrer que g_0 est continue et que g_1 est de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que g_n est de classe $\mathcal{C}^n$.
Établir une équation différentielle du premier ordre vérifiée par g_n.
En déduire une expression de $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)$.
CCP O16-C182

34. I) Montrer que $f(x) = -\ln(x)$ est convexe.
En déduire que $\left(\displaystyle\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}} \leq \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k$.
Soit M une matrice symétrique définie positive (ie ${}^tXMX > 0$ pour tout vecteur X non nul).
Montrer que les valeurs propres de M sont dans $\mathbb{R}_+^*$.
Montrer que les $m_{i,i}$ sont tous positifs.
Incomplet
II) Ensemble de définition de $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+n^2}$.
Est-elle continue ? Dérivable ? Intégrable sur D_f ?
CCP O16-C183

35. I) Montrer que $J_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \dfrac{\sin(nt)}{\sin t}\,\mathrm{d}t$ existe.
Calculer $J_{n+2} - J_n$.
En déduire que $(J_{2p+1})_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite constante. Montrer que, pour $a > 0$ et $\phi \in C^1([0,a],\mathbb{R})$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^a \phi(t)\mathrm{e}^{int}\,\mathrm{d}t = 0$.
Montrer que $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.
Existence de $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \dfrac{\sin(nt)}{t}\,\mathrm{d}t$.
II) Soit $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ et $J_n = \begin{pmatrix} a & & (b) \\ & \ddots & \\ (b) & & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à J_n.
Montrer que (Id, f, f^2) est liée.
Montrer que f est combinaison linéaire de Id et d'un projecteur.
J_n est elle diagonalisable ?
CCP O16-C184

36. I) Montrer que $J_n = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable.
Montrer que $\exists P_n \in O(n)$, $J_n = P_n \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & (0) & \vdots \\ 0 & \dots & n \end{pmatrix} P_n^{-1}$.
Expliciter P_2 et P_3.
Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $AJ_2 = J_2A$.
Montrer que $A = P_2 \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} P_2^{-1}$ où $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$.
Donner α et β en fonction de a et b.
Montrer que $\{B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\ BJ_3 = J_3B\}$ est un espace vectoriel dont on donnera la dimension.
II) Rayon de convergence et somme de $\displaystyle\sum \dfrac{1}{n}\cos\dfrac{2n\pi}{3}x^n$.
CCP O16-C185

37. I) Soit $J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer J^2.

   En déduire que J n'est pas inversible. J est-elle diagonalisable ? Donner les valeurs propres de J.
   Soit $M(a,b) = aI_3 + bJ$. Montrer qu'il existe $P \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}MP$ est diagonale. Trouver les valeurs propres de $M(a,b)$.
   Soit $F(x) = I_3 + (-1 + \mathrm{e}^x)J$ et $G(x) = I_3 - (1 + \mathrm{e}^x)J$.
   Montrer que $F(x+y) = F(x)F(y)$.
   En déduire que F est inversible et donner son inverse.
   Calculer $G(x)G(y)$. En déduire si G est inversible.

   II) Donner la limite quand n tend vers $+\infty$ de $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(1 + \frac{k}{n})$.

   En déduire la limite quand n tend vers $+\infty$ de $\left(\dfrac{(2n)!}{n!n^n}\right)^{\frac{1}{n}}$.

   CCP O16-C186

38. I) Soient $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 (1-t^2)^n\,\mathrm{d}t$,

   $J_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t$ et $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^n\,\mathrm{d}t$.

   Montrer que $\mathrm{e}^x \geq 1 + x$ et que $1 - t^2 \leq \mathrm{e}^{-t^2} \leq \dfrac{1}{1+t^2}$.

   Justifier l'existence de I, I_n, J_n, W_n puis montrer que $I_n \leq \dfrac{I}{\sqrt{n}} \leq J_n$.

   Montrer que $I_n = W_{2n+1}$ et $J_{n+1} = W_{2n}$.
   Montrer que (W_n) est monotone.
   Montrer que $W_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}W_n$. Calculer I.
   II) Soient u et v deux endomorphismes de E. Montrer que $u \circ v = u$ et $v \circ u = v$ si et seulement si u et v sont des projecteurs et $\mathrm{Ker}u = \mathrm{Ker}v$.
   CCP O16-C187

39. I) $E = \mathbb{R}_n[X]$, $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$. On pose $\mu_k = t^k$.

   Montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} t^k \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$ converge.

   Montrer, pour $P \in E$, que $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} P(t)\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$ converge.

   On pose, pour tout $P \in E$, $\mathcal{L}(P)(x) = \mathrm{e}^{-x}\displaystyle\int_{-\infty}^{x} P(t)\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$.

   Montrer que $\mathcal{L}(\mu_{k+1}) = \mu_{k+1} - (k+1)\mathcal{L}(\mu_k)$.

   En déduire que $\mathcal{L}(\mu_k) = (-1)^k k! \displaystyle\sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^j}{j!}\mu_j$.

   En déduire que $\mathcal{L}$ est trigonalisable.
   $\mathcal{L}$ est-il diagonalisable ? Donner ses valeurs propres.

   II) Donner les points d'affixe $z \in \mathbb{C} \setminus \{2i\}$ tels que $f(z) = \dfrac{z+1}{z-2i}$ est réel et ceux tels que $f(z)$ est imaginaire pur.
   CCP O16-C188

40. I) Soit $M = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 3 \\ -8 & -11 & -4 \\ 12 & 18 & 7 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

   Montrer que $\det(M - XId) = (1-X)^3$. M est elle diagonalisable ?
   M est-elle trigonalisable ? Montrer qu'on peut écrire $M = Id + N$, où N est une matrice nilpotente.

   Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(\frac{1}{n}M^n)$.

   Soit X un vecteur ; montrer que f qui, à la matrice A, associe AX, est continue. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(\frac{1}{n}\,M^nX)$.

Soit $X_0 = (x_0, y_0, z_0)$ non nul, et $X_{n+1} = MX_n$.
Montrer que pour tout n, X_n est non nul.
Montrer que $\displaystyle\sum_n \frac{1}{x_n^2 + y_n^2 + z_n^2}$ est en général une série convergente.
II) Montrer que f, continue et dérivable, telle que f' tend vers $+\infty$ en $+\infty$, tend vers $+\infty$ en $+\infty$.
CCP O16-C189

41. I) Soit $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + a_0$ un polynôme unitaire de $\mathbb{C}[X]$, auquel on associe une matrice compagnon de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $C_p = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$
Montrer que le rang de C_p vaut n si $a_0 \neq 0$ et vaut $n-1$ si $a_0 = 0$.
Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Montrer que $\mathrm{rg}(C_p - \lambda I_n) \leq n-1$.
En déduire la dimension des espaces propres associés.
Montrer que $\chi_{C_p} = (-1)^n P(X)$. Montrer que C_p est trigonalisable. À quelle(s) condition(s) nécessaire(s) et suffisante(s) sur le polynôme P la matrice C_p est-elle diagonalisable ?
Soient $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ les racines de P. On suppose $P \in \mathbb{Z}[X]$ et on écrit $P(X) = \displaystyle\prod_{k=1}^{p} (X - \lambda_k)^{m_k}$.
Soit $q \in \mathbb{N}$. Montrer que $Q(X) = \displaystyle\prod_{k=1}^{p} (X - \lambda_k^q)^{m_k} \in \mathbb{Z}[X]$.
II) Dessiner $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ 1 - x - y \geq 0\}$.
Montrer que $f(x,y) = xy(1-x-y)$ admet un maximum sur D et que ce maximum n'est pas sur « une frontière ».
CCP O16-C190

42. I) Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\ln(1+xt)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$, avec $x \in \mathbb{R}$.
Montrer que $\forall t \in [\min(0,x), \max(0,x)]$, $xt \geq 0$. En déduire que $f(x)$ existe. Montrer que f est croissante sur $\mathbb{R}_+$. Étudier la parité de f. Montrer que $f(x) > \displaystyle\int_0^x \frac{\ln(xt)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$, et en déduire la limite de f en $+\infty$.
manque une ou deux questions. Peut-être :
– Prouver que $\dfrac{f(x)}{x} = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x^2u)}{1+x^2u^2}\,\mathrm{d}u$ si $x > 0$.
– Etudier $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x}$.
– En majorant $\displaystyle\int_0^{1/\sqrt{x}} \frac{\ln(1+x^2u)}{1+x^2u^2}\,\mathrm{d}u$ et $\displaystyle\int_{1/\sqrt{x}}^1 \frac{\ln(1+x^2u)}{1+x^2u^2}\,\mathrm{d}u$, prouver que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.
– Représenter la fonction f.
II) Trouver les $z \in \mathbb{C}$ tels que les points A d'affixe 1, M d'affixe z et N d'affixe $z^2 - 1$, distincts, soient alignés.
CCP O16-C191

43. I) Soient E euclidien de dimension $n+1$ et $\mathcal{B} = (e_0, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de E. Soit a un vecteur de E unitaire et orthogonal à e_0. On pose $a_i = (a|e_i)$ pour $1 \leq i \leq n$.
Prouver que $S = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & \ldots & a_n \\ a_1 & & & \\ \vdots & & 0_n & \\ a_n & & & \end{pmatrix}$, où 0_n désigne la matrice nulle carrée d'ordre n, est diagonalisable.
Montrer qu'au moins un des a_i n'est pas nul, en déduire le rang de S. Déterminer $\mathrm{Ker}S$ et donner une base de son orthogonal.
Calculer $\mathrm{tr}S$ et $\mathrm{tr}S^2$.
En déduire les valeurs propres non nulles de S.
Calculer Se_0 et Sa. En déduire les sous-espaces propres associées aux valeurs propres non nulles.

II) Parmi tous les parallélépipèdes rectangles (ou pavés rectangles) de volume 1, quels sont ceux d'aire minimale ?

CCP O16-C192

44. I) Soient $E = \mathbb{R}^n$, $u = (1, \dots, 1) \in E$, et $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in O_n(\mathbb{R})$. On pose $s(A) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}$. Soit Φ_A l'endomorphisme de E canoniquement associé à A. Exprimer $\big(u | \Phi_A(u)\big)$ en fonction de $s(A)$.
En déduire que $|s(A)| \leq n$.
Montrer que si $|s(A)| = n$, alors alors $\Phi_A(u) = \pm u$.
Soit $n = 2$. Déterminer l'ensemble des matrices telles que $|s(A)| = 2$.
II) Prouver que $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{(2n)!}{(n! n^n)} \right)^{1/n} = \exp\left(\int_0^1 \ln(1 + x) \, \mathrm{d}x \right)$.

CCP O16-C193

45. I) Montrer que $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^{2n}$, où $a_n = \frac{(-1)^n}{2^{2n} (n!)^2}$, est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
Montrer que f satisfait l'équation différentielle $ty'' + y' + ty = 0$.
Montrer que $g(t) = f^2(t) + (f')^2(t)$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$, et en déduire que f et f' sont bornées sur $\mathbb{R}_+$.
Soit $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t) \, \mathrm{d}t$ pour $x > 0$.
Prouver que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$; à l'aide d'une relation entre F et F', exprimer $F(x)$ (le résultat comporte une constante C inconnue).
Prouver que $\forall x > 1, \quad F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \binom{2n}{n}}{4^n x^{2n+1}}$ et en déduire C.
II) Déterminer $E = \{P \in \mathbb{C}[X], \, P(X^2) = P(X)P(X+1)\}$.

CCP O16-C194

46. I) Montrer que $f(P) = \sum_{i=0}^{n} \left(\int_0^1 t^i P(t) \, \mathrm{d}t \right) X^i$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Montrer que si $P \in \mathrm{Ker} f$, alors $\int_0^1 P(t)Q(t) \, \mathrm{d}t = 0$ pour tout $Q \in \mathbb{R}_n[X]$. En déduire que $\mathrm{Ker} f = \{0\}$.
Donner la forme de H, la matrice canoniquement associée à f.
Est-elle inversible ? Diagonalisable ? Répondre sans calculs.
Soit $U \in \mathbb{R}^{n+1}$; montrer que ${}^tUHU = \int_0^1 P^2(t) \, \mathrm{d}t$ où P est un polynôme. A-t-on ${}^tUHU \geq 0$?
Montrer que si ${}^tUHU = 0$, alors $U = 0$.
Montrer que les valeurs propres de H sont strictement positives.
Question oubliée.
II) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f(x) = x^3 + \lambda x$. Donner le développement limité en 0 à l'ordre 5 de sa réciproque.

CCP O16-C195