Oral

Mathématiques 2

PC

L'espace $E = \mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne canonique.

1. Déterminer les matrices dans la base canonique de

   – la rotation d'axe orienté par $\vec{\imath} + \vec{k}$ d'angle $\pi/4$;

   – la réflexion par rapport au plan $F : x + 2y + z = 0$.

2. Déterminer des réels α, a, b, c et d tels que $A = \alpha \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & a & c \\ -1 & b & d \end{pmatrix}$ soit une matrice de rotation.

   En préciser les éléments caractéristiques.

3. Soit r une rotation d'axe orienté $\mathrm{Vect}(a)$ avec $\|a\| = 1$ et d'angle θ et soit $x \in E$. On note (u, v) l'unique couple de $\mathrm{Vect}(a) \times \mathrm{Vect}(a)^\perp$ tel que $x = u + v$.

   a. Préciser (u, v) en fonction de x puis déterminer $r(u)$.

   b. Déterminer une expression simple de $r(v)$ en fonction de v et $a \wedge v$.

   (On pourra remarquer que $(a, v, a \wedge v)$ est une famille orthogonale.)

   c. En déduire que $r(x) = (1 - \cos\theta)\langle x, a\rangle a + \cos\theta\, x + \sin\theta(a \wedge x)$.

4. En utilisant le résultat précédent, retrouver la matrice de la rotation d'axe $\vec{\imath} + \vec{k}$ d'angle $\pi/4$.

5. Soit le système différentiel $X' = AX$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   a. Montrer qu'il existe une application $t \mapsto B(t)$ à valeurs dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ que l'on déterminera telle que $\forall t \in \mathbb{R}, \quad X(t) = B(t)X(0)$.

   b. Décrire l'endomorphisme canoniquement associé à $B(t)$ pour t réel fixé.