On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -23 & 10 & 3 & -11 \\ 314 & -126 & -39 & 139 \\ -426 & 174 & 56 & -187 \\ 225 & -92 & -29 & 100 \end{pmatrix}$$

et u l'endomorphisme canoniquement associé de $\mathbb{R}^4$.

Avant toute chose, afin de corriger une éventuelle faute de frappe, vérifier que $u(1,2,3,4) = (-38, 501, -658, 354)$.

1. Déterminer le polynôme caractéristique P de u, ainsi que ses valeurs propres et espaces propres. Que dire de sa diagonalisabilité ?

2. On pose $v_1 = (-8, 103, -139, 73)$, $v_2 = u(v_1)$ et $v_3 = u(v_2)$.

   a. Montrer que (v_1, v_2, v_3) est liée et déterminer une relation de dépendance linéaire entre ces vecteurs.

   b. On pose $F = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$. Montrer que F est un plan stable par u dont $B = (v_1, v_2)$ est une base.

   c. Déterminer la matrice C dans la base B de l'endomorphisme u_F induit par u sur F.

   d. Déterminer le polynôme caractéristique P_F de u_F, ainsi que ses valeurs propres et espaces propres. Que dire de sa diagonalisabilité ?

   e. Comparer P_F et P.

3. On pose $w_1 = (2, -13, 17, -9)$, $w_2 = u(w_1)$, $w_3 = u(w_2)$ et $w_4 = u(w_3)$.

   a. Montrer que (w_1, w_2, w_3, w_4) est liée et déterminer une relation de dépendance linéaire entre ces vecteurs.

   b. On pose $G = \mathrm{Vect}(w_1, w_2, w_3)$. Montrer que G est stable par u et que $B' = (w_1, w_2, w_3)$ en est une base.

   c. Déterminer la matrice C' dans la base B' de l'endomorphisme u_G induit par u sur G.

   d. Déterminer le polynôme caractéristique P_G de u_G, ainsi que ses valeurs propres et espaces propres. Que dire de sa diagonalisabilité ?

   e. Comparer P_G et P.

4. Peut-on trouver un plan de $\mathbb{R}^4$ stable par u sur lequel le polynôme caractéristique de l'endomorphisme induit est $(X-2)^2$?