



1. Soit $(t, x) \mapsto h(t, x)$ une application de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 à valeurs réelles. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$H(x) = \int_0^x h(t, x) dt$$

En utilisant le logiciel informatique exprimer la dérivée $H'(x)$ à l'aide de l'application h .

On admettra provisoirement que $H'(x)$ existe pour tout x réel ainsi que la formule trouvée.

2. On veut déterminer l'ensemble des fonctions f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} et de classe C^1 qui vérifient le système d'équations suivant :

$$(S) \begin{cases} f(0) = 1 \\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) + 8 \int_0^x \cos(x-t)f(t)dt = 9 \end{cases}$$

- a. Montrer qu'une application f de classe C^1 et qui vérifie le système d'équations (S) est forcément de classe C^∞ .
- b. Montrer qu'il existe des fonctions f_1, f_2, f_3 à déterminer explicitement et des constantes A, B, F telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait nécessairement

$$f(x) = Af_1(x) + Bf_2(x) + f_3(x) + F$$

- c. Déterminer toutes les solutions du problème considéré.

3. Démontrer le résultat trouvé à la première question.