1. On pose pour tout réel x

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp(in^2 x)}{2^n}$$

   a. Vérifier que $f(x)$ existe pour tout x.

   b. Justifier la continuité de f.

   c. Tracer à l'écran la courbe donnée par la paramétrisation

$$x \mapsto M(x)$$

   où $M(x)$ est le point du plan complexe d'affixe $f(x)$.

   On pourra utiliser l'instruction `complexplot` *de la bibliothèque* `plots` *et se contenter d'une somme finie raisonnable de termes.*

2. Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et exprimer, pour tout entier naturel p et tout x, $f^{(p)}(x)$ comme somme d'une série.

3. On pose, pour tout entier naturel p,

$$a_p = \frac{f^{(p)}(0)}{p!}$$

   et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G_p(x) = \left| \sum_{k=0}^{p} a_k x^k \right|$$

   a. Donner la valeur exacte de a_0, a_1,..., a_9.

   b. Pour tout $p \in \{1, \ldots, 5\}$, tracer simultanément à l'écran les courbes représentatrices des fonctions G_p sur des intervalles réels centrés en 0.

   c. On s'intéresse à la série entière

$$\sum a_p x^p$$

   Montrer que pour tout x réel non nul, la suite $a_p x^p$ diverge.

   En déduire le rayon de convergence de cette série entière.

4.
   a. Déterminer les coefficients de Fourier exponentiels de f.

   b. Quels théorèmes peut-on appliquer à sa série de Fourier ?

   c. On note pour tout entier naturel n, S_n la somme partielle de rang n de sa série de Fourier.

   Tracer successivement à l'écran, pour les premières valeurs de n, les courbes données par les paramétrisations

$$x \mapsto N_n(x)$$

   où $N_n(x)$ est le point du plan complexe d'affixe $S_n(x)$.