On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\begin{cases} f(0,0) = 0 \\ f(x,y) = \dfrac{x^3y}{x^4+y^2} + xy - 2y \end{cases}$$

1. Représenter la surface de $\mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y) = z$.

   Que peut on dire de f en $(0,0)$?

   Montrer ce résultat.

2.
   a. Calculer la dérivée de f suivant le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées (a,b) au point $c = (1,1)$.

   b. Comment choisir $\vec{n}$ unitaire pour que cette dérivée soit maximale ?

3. Étude des extremums de f

   a. Donner les coordonnées des points critiques de f.

   b. Soit (x_0,y_0) un point critique.

   On considère un développement limité à l'ordre 2 de la fonction $r \mapsto f(x_0 + ra,\ y_0 + rb)$ où (a,b) est un vecteur unitaire. On note $q(a,b)$ le coefficient de r^2.

   En étudiant la quadrique d'équation $q(a,b) = 0$ déterminer la nature des points critiques de f.

   c. Y a-t-il des extremums globaux ?

4.
   a. Donner les dérivées partielles premières en $(0,0)$.

   b. Représenter les surfaces définies par $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = z$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = z$.

   c. Que peut-on conjecturer de ces représentations ? Expliquer ce résultat.