Mathématiques 2

Oral

PC

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On rappelle que M est dite nilpotente s'il existe un entier naturel p strictement positif tel que $M^p = 0$. On appelle indice de nilpotence d'une telle matrice le plus petit entier vérifiant cette égalité ; on note r cet entier.

1. Dans cette question, M est supposée nilpotente.

   a. Que peut-on dire des valeurs propres de M ?

   b. Si M est triangulaire supérieure, montrer que l'on a $1 \leqslant r \leqslant n$. Et dans le cas général ?

   c. Écrire une procédure, en langage Maple ou Mathematica, qui prend en entrée une matrice M, carrée de dimension n quelconque, et renvoie son indice de nilpotence ou -1 si elle ne l'est pas. Tester la procédure avec la matrice I_6 puis avec la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 1 & 1 \\ -17 & -6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

   d. À quelle condition une matrice nilpotente est-elle diagonalisable ?

2. Considérons les matrices

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -15625 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 18750 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -9375 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2500 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -375 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 30 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad N = M - 5I_6$$

   a. Déterminer le polynôme caractéristique de M, ainsi que ses valeurs propres.

   b. Que donne la procédure écrite à la question 1.c, appliquée à N ? Calculer, si besoin est, N^5 et N^6 et déterminer l'indice de nilpotence r de N.

   c. Déterminer un vecteur v de $\mathbb{R}^5$ tel que $N^{r-1}v \neq 0$ et montrer que la famille $(v,Nv,\dots,N^{r-1}v)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^5$.

   En déduire que N est semblable à la matrice

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   où pour tout i, $\varepsilon_i \in \{0,1\}$ est à déterminer.

   On précisera les matrices P et P^{-1} telles que $N = PJP^{-1}$.

3. Soit P_n le polynôme de degré n défini par

$$P_n = 1 + X + \frac{X^2}{2!} + \cdots + \frac{X^n}{n!}$$

   a. Calculer $P_5(J)$ puis $(P5(J))^{-1}$. Déterminer un polynôme Q_5 tel que $(P_5(J))^{-1} = Q_5(J)$.

   b. Soit $N_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente. Montrer qu'il existe un polynôme Q_n (à calculer explicitement) tel que $(P_n(N_n))^{-1} = Q_n(N_n)$.