1. **plot, int**
Avec Maple : pour $x \in \mathbb{R}$, $y > 0$, on pose $P(x,y) = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{y}{x^2+y^2}$.
Montrer que $\Delta P(x,y) = 0$, où $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$.
Tracer $P(x,y)$ pour $y \in \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\}$.
Trouver une primitive de $u \mapsto P(x-u,y)$.
En déduire que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} P(x-u,y)\,\mathrm{d}u$ est constante et la calculer.
Soit F continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$; montrer que $G(x) = Q(x,y) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{\mathbb{R}} P(x-u,y)F(u)\,\mathrm{d}u$ est $\mathcal{C}^2$ ainsi que $H(y) = Q(x,y) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{\mathbb{R}} P(x-u,y)F(u)\,\mathrm{d}u$; montrer que $\Delta Q = 0$ puis, en supposant de plus que F est bornée, prouver que $\displaystyle\lim_{y\to 0^+} Q(x,y) = F(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ fixé.
(Centrale-PC) O17-C022

2. **with(plots), implicitplot3d, with(LinearAlgebra), Eigenvalues, spacecurve**
Avec Maple : montrer que $\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca \geq 0$. Quand y a-t-il égalité ?
$A = \begin{pmatrix} a & c & b \\ c & b & a \\ b & a & c \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?
Tracer la quadrique d'équation :
$a(x^2+2yz) + b(y^2+2xz) + c(z^2+2xy) = 1$ pour $(a,b,c) = (1,2,-\frac{2}{3})$ et $(a,b,c) = (-1,-2,\frac{2}{3})$.
Déterminer la nature de la quadrique si $a=b=c$ puis si a, b et c ne sont pas tous égaux.
Proposer une condition nécessaire et suffisante sur (a,b,c) pour que la quadrique soit une surface de révolution non vide et non dégénérée.
En supposant cette condition réalisée, déterminer les valeurs de (a,b,c) pour lesquelles la surface peut être considérée comme la rotation d'une droite D autour d'un axe Δ.
Déterminer D et Δ et vérifier les résultats en les traçant, ainsi que la surface, sur un même graphe. (Centrale-PC) O17-078

3. **with(plots), polarplot, implicitplot3d**
I) Tracer la courbe d'équation $f(x,y) = y^2(5+\sqrt{2}y) - 3x^2(y+\sqrt{2}) = 0$.
Déterminer ses points doubles et les points pour lesquels $\overrightarrow{grad} f = 0$. Que remarque-t-on ?
Tracer la surface S d'équation $\dfrac{1}{x-y} + \dfrac{1}{y-z} + \dfrac{1}{z-x} = 1$.
Déterminer sa direction d, puis donner son équation dans un repère orthonormé direct du type (O, v_1, v_2, d).
Trouver la courbe Cs intersection de S et d'un plan orthogonal à d et faire le lien avec la courbe étudiée en premier lieu. *Centrale* O18-082

4. **with(plots), implicitplot, plot**
Tracer $\Gamma : x^2+2xy+4y^2-1 = 0$ et $\Gamma' : \begin{cases} x(t) = \cos t - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\sin t \\ y(t) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\sin t \end{cases}$. Que peut-on dire ? Comment montrer qu'elles sont égales ?
Calculer le rayon de courbure en un point de Γ'.
On effectue un paramétrage normal de Γ ; montrer que $x'^2 + y'^2 = 1$ et que $(x+y)x' + (x+4y)y' = 0$.
Calculer les vecteurs T et N du repère de Frenet en fonction de x et y. Calculer $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}$ et le rayon de courbure en un point de Γ. Le comparer à celui trouvé pour Γ'. *Centrale* O18-C047