1. .

Partie II. Un tri pour accélérer

Une méthode plus efficace serait de trier le tableau par ordre croissant tout en prenant la cellule du milieu dans le tableau trié. Cette méthode certes rapide requiert $\mathcal{O}(n \ln n)$ opérations. Il existe une méthode optimale en temps linéaire $\mathcal{O}(n)$ pour trouver le médian d'un ensemble de n éléments. Cette partie a pour but d'en proposer une implémentation.

Une fonction annexe nécessaire pour cet algorithme consiste à savoir séparer en deux un ensemble de valeurs. Soit un tableau tab et un réel appelé pivot $p = tab[i]$, il s'agit de réordonner les éléments du tableau en mettant en premier les éléments strictement plus petits que le pivot $tab_{<p}$, puis les éléments égaux au pivot p, et en dernier les éléments strictement plus grands $tab_{>p}$. Sur le tableau exemple, en prenant comme valeur de pivot 8 on obtiendra le tableau résultat suivant :

3, 2, 5, 1, 6	**8, 8**	21, 34, 9, 14

Notez que dans le résultat les nombres plus petits que le pivot $3, 2, 5, 1, 6$ peuvent être dans n'importe quel ordre les uns par rapport aux autres.

Question 3 Écrire une fonction `partition`$(tab, a, b, indicePivot)$ qui prend en paramètre un tableau d'entiers $tab[a..b]$ ainsi qu'un entier $a \leq indicePivot \leq b$. Soit $p = tab[indicePivot]$. La fonction devra réordonner les éléments de $tab[a..b]$ comme expliqué précédemment en prenant comme pivot le nombre p. La fonction retournera le nouvel indice de la case ou se trouve la valeur p.
Dans cette question, on suppose que les modifications effectuées par la fonction sur le tableau tab sont persistantes, même après l'appel de la fonction.

Remarquons que le $\lfloor n/2 \rfloor$-ème élément dans l'ordre croissant d'un tableau de taille n est un élément médian du tableau considéré. Nous allons donc non pas programmer une méthode pour trouver le médian mais plus généralement pour trouver le k-ème élément d'un ensemble. Nous allons utiliser l'algorithme suivant :

On cherche le k-ème élément du tableau $tab[a..b]$.

- Si $k = 1$ et $a = b$ alors renvoyer $tab[a]$
- Sinon, soit $p = tab[a]$. Partitionner le tableau $tab[a..b]$ en utilisant le pivot p en mettant en premier les éléments plus petits que p. Soit i l'indice de p dans le tableau résultant.
  - Si $i - a + 1 > k$ chercher le k-ème élément dans $tab[a..i-1]$ et renvoyer cet élément.
  - Si $i - a + 1 = k$ renvoyer le pivot.
  - Si $i - a + 1 < k$ chercher le $(k - i + a - 1)$-ème élément dans $tab[i + 1..b]$ et renvoyer cet élément.

Question 4 Écrire une fonction `elementK`(tab, a, b, k) qui réalise l'algorithme de sélection du k-ème élément dans le tableau $tab[a..b]$ décrit précédemment et renvoie cet élément.

Question 5 Supposons que dans l'algorithme précédent nous voulions rechercher le premier élément mais qu'à chaque étape le pivot choisi est le plus grand élément, quel est un ordre de grandeur du nombre d'opérations réalisées par votre fonction ?

2. **solve, evalf, Re, plot(...,discont=true)**

   Soit $a > 0$. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists! y \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_x^y e^{t^2}\ \mathrm{d}t = a$ (on pourra étudier la fonction $F : x \to \displaystyle\int_0^x e^{t^2}\ \mathrm{d}t$) ; on pose $y = f(x)$.

   Montrer que $x = -f(-y)$. Que peut-on en déduire sur la courbe représentative de f ?

   Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - x)$. Que peut-on en déduire sur la courbe représentative de f ?

   Tracer la courbe représentative de f avec Maple dans le cas $a = 2$. O13-063

3. **solve, sum('...','i'=a..b), evalf**

   I) Montrer que, si (U_n) et (V_n) sont deux suites de réels et si V_n ne s'annule jamais, $U_n - V_n = o(V_n) \Leftrightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{U_n}{V_n} = 1$.

   On note $f(x) = x + \ln x$; montrer qu'il existe un unique réel x_n tel que $f(x_n) = n$; en donner un équivalent en $+\infty$ et faire un développement limité à 3 termes.

   II) Convergence, pour $p \in \{2, 3, 4\}$ de la série de terme général $U_n = \sin(\pi(1 + n^p)^{\frac{1}{p}})$.

   On remplace p par un réel compris strictement entre 0 et 2 ; donner une valeur approchée de la somme partielle d'ordre N , et faire une conjecture quant à la convergence de la série. *Centrale* O18-079