CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 2

Oral

PC

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On rappelle que M est dite nilpotente s'il existe un entier naturel p strictement positif tel que $M^p = 0$. On appelle indice de nilpotence d'une telle matrice le plus petit entier vérifiant cette égalité ; on note r cet entier.

1. Dans cette question, M est supposée nilpotente.

   a. Que peut-on dire des valeurs propres de M ?

   b. Si M est triangulaire supérieure, montrer que l'on a $1 \leqslant r \leqslant n$. Et dans le cas général ?

   c. Écrire une procédure, en langage Maple ou Mathematica, qui prend en entrée une matrice M, carrée de dimension n quelconque, et renvoie son indice de nilpotence ou -1 si elle ne l'est pas. Tester la procédure avec la matrice I_6 puis avec la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 1 & 1 \\ -17 & -6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

   d. À quelle condition une matrice nilpotente est-elle diagonalisable ?

2. Considérons les matrices

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -15625 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 18750 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -9375 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2500 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -375 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 30 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad N = M - 5I_6$$

   a. Déterminer le polynôme caractéristique de M, ainsi que ses valeurs propres.

   b. Que donne la procédure écrite à la question 1.c, appliquée à N ? Calculer, si besoin est, N^5 et N^6 et déterminer l'indice de nilpotence r de N.

   c. Déterminer un vecteur v de $\mathbb{R}^5$ tel que $N^{r-1}v \neq 0$ et montrer que la famille $(v,Nv,\dots,N^{r-1}v)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^5$.

   En déduire que N est semblable à la matrice

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   où pour tout i, $\varepsilon_i \in \{0,1\}$ est à déterminer.

   On précisera les matrices P et P^{-1} telles que $N = PJP^{-1}$.

3. Soit P_n le polynôme de degré n défini par

$$P_n = 1 + X + \frac{X^2}{2!} + \cdots + \frac{X^n}{n!}$$

   a. Calculer $P_5(J)$ puis $(P5(J))^{-1}$. Déterminer un polynôme Q_5 tel que $(P_5(J))^{-1} = Q_5(J)$.

   b. Soit $N_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente. Montrer qu'il existe un polynôme Q_n (à calculer explicitement) tel que $(P_n(N_n))^{-1} = Q_n(N_n)$.

1. Montrer que pour tout entier naturel n, il existe un unique polynôme P_n tel que

$$\forall z \in \mathbb{C}^* \quad P_n(z+z^{-1}) = z^n + z^{-n}$$

On recherchera une relation de récurrence vérifiée par cette famille de polynômes ; on pourra pour cela calculer le produit

$$(z^n + z^{-n})(z+z^{-1})$$

pour $z \in \mathbb{C}^*$.

2. Calculer les valeurs de P_n pour $0 \leqslant n \leqslant 6$.

Que peut-on conjecturer quant au degré, aux coefficients, au coefficient dominant, à la parité de P_n ?

Démontrer rapidement ces propriétés.

3. Représenter les polynômes P_n, pour $0 \leqslant n \leqslant 6$, sur le même graphe.

4. On note $E = \mathbb{R}_6[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 6 et on pose :

$$\forall (P,Q) \in E^2 \quad \langle P,Q\rangle = \int_{-2}^{2} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{4-t^2}}\mathrm{d}t$$

   a. Vérifier la convergence de l'intégrale et prouver que l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur E.

   b. Calculer $\langle P_i,P_j\rangle$ pour tout $(i,j) \in \{0,\dots,6\}^2$.

   Que peut-on en déduire ?

   c. Soit $(Q_n)_{0\leqslant n\leqslant 6}$ la base orthonormale de E construite à partir de la base canonique par le procédé de Gram-Schmidt.

   Expliciter Q_n pour $0 \leqslant n \leqslant 6$.

   Que remarque-t-on ?

   d. Démontrer directement le résultat de la question précédente.

5. Déterminer les racines de P_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Vérifier le résultat obtenu pour $0 \leqslant n \leqslant 6$.

L'espace $\mathbb{R}^2$ est muni de sa structure affine canonique.

Soit le triangle ABC avec B et C des points sur l'axe des abscisses. Pour M un point de l'axe des abscisses, on note

- P_M le projeté orthogonal de M sur (AC) ;
- Q_M le projeté orthogonal de P_M sur (AB) ;
- R_M le projeté orthogonal de Q_M sur (BC).

On considère l'application $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui à l'abscisse de M associe l'abscisse de R_M.

On cherche à résoudre $\varphi(x) = x$ avec $x \in \mathbb{R}$.

1. Étant donné trois points I, J et M avec $I \neq J$, déterminer le système vérifié par les coordonnées du projeté de M sur la droite (IJ).

2. Écrire une procédure `proj` qui, pour les points I, J et M donnés avec $I \neq J$, retourne le projeté orthogonal de M sur la droite (IJ).

3. En utilisant la procédure `proj`, écrire une procédure qui, pour un réel x donné, retourne l'abscisse du point R_M avec $M(x,0)$.

On choisit les points $B(0,0)$, $C(3,0)$ et $A(1,2)$. Pour x réel, on définit la suite de points $M_n(x_n,0)$ du plan par

$$x_0 = x \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = \varphi(x_n)$$

4. Étant donnés un réel x et un entier N, programmer la représentation graphique des $N+1$ premiers termes de la suite (x_n). Tester pour $x = 2{,}9$ et $N = 100$. Qu'observe-t-on ?

5. Pour M et M' des points distincts de (BC) avec $M \neq C$, justifier l'égalité

$$\frac{P_M P_{M'}}{MM'} = \frac{P_M C}{MC} = |\cos c|$$

   où c est la mesure de l'angle $\widehat{BCA}$.

6. En déduire qu'il existe $k \in]0,1[$ tel que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant k|x-y|$$

7. En admettant la convergence de la suite (x_n), déterminer une solution approchée de l'équation $\varphi(x) = x$.

8. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $u_n = x_{n+1} - x_n$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leqslant k^n |u_1 - u_0|$$

   En déduire la convergence de $\sum u_n$.

9. Conclure.

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\begin{cases} f(0,0) = 0 \\ f(x,y) = \dfrac{x^3 y}{x^4 + y^2} + xy - 2y \end{cases}$$

1. Représenter la surface de $\mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y) = z$.

   Que peut on dire de f en $(0,0)$?

   Montrer ce résultat.

2.
   a. Calculer la dérivée de f suivant le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées (a,b) au point $c = (1,1)$.

   b. Comment choisir $\vec{n}$ unitaire pour que cette dérivée soit maximale ?

3. Étude des extremums de f

   a. Donner les coordonnées des points critiques de f.

   b. Soit (x_0,y_0) un point critique.

      On considère un développement limité à l'ordre 2 de la fonction $r \mapsto f(x_0 + ra,\ y_0 + rb)$ où (a,b) est un vecteur unitaire. On note $q(a,b)$ le coefficient de r^2.

      En étudiant la quadrique d'équation $q(a,b) = 0$ déterminer la nature des points critiques de f.

   c. Y a-t-il des extremums globaux ?

4.
   a. Donner les dérivées partielles premières en $(0,0)$.

   b. Représenter les surfaces définies par $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = z$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = z$.

   c. Que peut-on conjecturer de ces représentations ? Expliquer ce résultat.

1. On pose pour tout réel x

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\exp(in^2x)}{2^n}$$

   a. Vérifier que $f(x)$ existe pour tout x.

   b. Justifier la continuité de f.

   c. Tracer à l'écran la courbe donnée par la paramétrisation

$$x\mapsto M(x)$$

   où $M(x)$ est le point du plan complexe d'affixe $f(x)$.

   On pourra utiliser l'instruction `complexplot` *de la bibliothèque* `plots` *et se contenter d'une somme finie raisonnable de termes.*

2. Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et exprimer, pour tout entier naturel p et tout x, $f^{(p)}(x)$ comme somme d'une série.

3. On pose, pour tout entier naturel p,

$$a_p=\frac{f^{(p)}(0)}{p!}$$

   et

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad G_p(x)=\left|\sum_{k=0}^{p}a_kx^k\right|$$

   a. Donner la valeur exacte de a_0, a_1,…, a_9.

   b. Pour tout $p\in\{1,\dots,5\}$, tracer simultanément à l'écran les courbes représentatrices des fonctions G_p sur des intervalles réels centrés en 0.

   c. On s'intéresse à la série entière

$$\sum a_px^p$$

   Montrer que pour tout x réel non nul, la suite a_px^p diverge.

   En déduire le rayon de convergence de cette série entière.

4.
   a. Déterminer les coefficients de Fourier exponentiels de f.

   b. Quels théorèmes peut-on appliquer à sa série de Fourier ?

   c. On note pour tout entier naturel n, S_n la somme partielle de rang n de sa série de Fourier.

   Tracer successivement à l'écran, pour les premières valeurs de n, les courbes données par les paramétrisations

$$x\mapsto N_n(x)$$

   où $N_n(x)$ est le point du plan complexe d'affixe $S_n(x)$.

1. Soit $(t, x) \mapsto h(t, x)$ une application de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs réelles. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$H(x) = \int\limits_0^x h(t, x)\,\mathrm{d}t$$

En utilisant le logiciel informatique exprimer la dérivée $H'(x)$ à l'aide de l'application h.

On admettra provisoirement que $H'(x)$ existe pour tout x réel ainsi que la formule trouvée.

2. On veut déterminer l'ensemble des fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et de classe C^1 qui vérifient le système d'équations suivant :

$$(S)\begin{cases} f(0) = 1 \\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) + 8\displaystyle\int\limits_0^x \cos(x-t)f(t)\mathrm{d}t = 9 \end{cases}$$

   a. Montrer qu'une application f de classe C^1 et qui vérifie le système d'équations (S) est forcément de classe C^∞.

   b. Montrer qu'il existe des fonctions f_1, f_2, f_3 à déterminer explicitement et des constantes A, B, F telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait nécessairement

$$f(x) = Af_1(x) + Bf_2(x) + f_3(x) + F$$

   c. Déterminer toutes les solutions du problème considéré.

3. Démontrer le résultat trouvé à la première question.

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -23 & 10 & 3 & -11 \\ 314 & -126 & -39 & 139 \\ -426 & 174 & 56 & -187 \\ 225 & -92 & -29 & 100 \end{pmatrix}$$

et u l'endomorphisme canoniquement associé de $\mathbb{R}^4$.

Avant toute chose, afin de corriger une éventuelle faute de frappe, vérifier que $u(1,2,3,4) = (-38, 501, -658, 354)$.

1. Déterminer le polynôme caractéristique P de u, ainsi que ses valeurs propres et espaces propres. Que dire de sa diagonalisabilité ?

2. On pose $v_1 = (-8, 103, -139, 73)$, $v_2 = u(v_1)$ et $v_3 = u(v_2)$.

   a. Montrer que (v_1, v_2, v_3) est liée et déterminer une relation de dépendance linéaire entre ces vecteurs.

   b. On pose $F = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$. Montrer que F est un plan stable par u dont $B = (v_1, v_2)$ est une base.

   c. Déterminer la matrice C dans la base B de l'endomorphisme u_F induit par u sur F.

   d. Déterminer le polynôme caractéristique P_F de u_F, ainsi que ses valeurs propres et espaces propres. Que dire de sa diagonalisabilité ?

   e. Comparer P_F et P.

3. On pose $w_1 = (2, -13, 17, -9)$, $w_2 = u(w_1)$, $w_3 = u(w_2)$ et $w_4 = u(w_3)$.

   a. Montrer que (w_1, w_2, w_3, w_4) est liée et déterminer une relation de dépendance linéaire entre ces vecteurs.

   b. On pose $G = \mathrm{Vect}(w_1, w_2, w_3)$. Montrer que G est stable par u et que $B' = (w_1, w_2, w_3)$ en est une base.

   c. Déterminer la matrice C' dans la base B' de l'endomorphisme u_G induit par u sur G.

   d. Déterminer le polynôme caractéristique P_G de u_G, ainsi que ses valeurs propres et espaces propres. Que dire de sa diagonalisabilité ?

   e. Comparer P_G et P.

4. Peut-on trouver un plan de $\mathbb{R}^4$ stable par u sur lequel le polynôme caractéristique de l'endomorphisme induit est $(X-2)^2$?

L'espace $E = \mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne canonique.

1. Déterminer les matrices dans la base canonique de
   - la rotation d'axe orienté par $\vec{\imath} + \vec{k}$ d'angle $\pi/4$;
   - la réflexion par rapport au plan $F : x + 2y + z = 0$.

2. Déterminer des réels α, a, b, c et d tels que $A = \alpha \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & a & c \\ -1 & b & d \end{pmatrix}$ soit une matrice de rotation.

   En préciser les éléments caractéristiques.

3. Soit r une rotation d'axe orienté $\mathrm{Vect}(a)$ avec $\|a\| = 1$ et d'angle θ et soit $x \in E$. On note (u, v) l'unique couple de $\mathrm{Vect}(a) \times \mathrm{Vect}(a)^\perp$ tel que $x = u + v$.

   a. Préciser (u, v) en fonction de x puis déterminer $r(u)$.

   b. Déterminer une expression simple de $r(v)$ en fonction de v et $a \wedge v$.

   (On pourra remarquer que $(a, v, a \wedge v)$ est une famille orthogonale.)

   c. En déduire que $r(x) = (1 - \cos\theta)\langle x, a\rangle a + \cos\theta\, x + \sin\theta(a \wedge x)$.

4. En utilisant le résultat précédent, retrouver la matrice de la rotation d'axe $\vec{\imath} + \vec{k}$ d'angle $\pi/4$.

5. Soit le système différentiel $X' = AX$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   a. Montrer qu'il existe une application $t \mapsto B(t)$ à valeurs dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ que l'on déterminera telle que $\forall t \in \mathbb{R}, \quad X(t) = B(t)X(0)$.

   b. Décrire l'endomorphisme canoniquement associé à $B(t)$ pour t réel fixé.

On pose pour tout $x \in [0,1[$, $f(x) = \sqrt{1-x}\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n^2}$ et pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $f_N(x) = \sqrt{1-x}\sum_{n=1}^{N} x^{n^2}$.

1. Vérifier que f est correctement définie.

2. Représenter simultanément les fonctions f_N pour $N \in \{1, 2, ..., 10\}$.

   Quelle conjecture peut-on en déduire ?

3. Calculer les valeurs approchées des maximums des fonctions f_N pour $N \in \{2, 4, ..., 40\}$.

   On justifiera la monotonie de cette suite.

4. On note $\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

   Donner la valeur de $A_N = \sum_{n=0}^{N} a_n$.

5. Soit g une fonction développable en série entière de rayon égal à 1.

   On note $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ et on suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n \geqslant 0$. On note $C_N = \sum_{n=1}^{N} c_n$.

   Montrer que, pour tout $x \in]-1,1[$, $g(x) = (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} C_n x^n$.

   On note $\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$. Quelle est la valeur de $B_N = \sum_{n=0}^{N} b_n$?

6. Calculer la limite $\lim\limits_{N\to\infty} \frac{A_N}{B_N}$.

   La comparer aux valeurs trouvées à la **question 3**.

7. Montrer la conjecture de la **question 2**.

Dans cet exercice, on se place dans l'espace affine euclidien $\mathbb{R}^3$ rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

1. Soit P le plan d'équation $x+y-2z-1=0$. Déterminer la distance d'un point $M(x,y,z)$ à P, notée $d(M,P)$.

2. Soit D la droite passant par le point $A(1,1,0)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

   Représenter simultanément à l'écran la droite D et le plan P. Sont-ils parallèles ?

   Calculer la distance d'un point $M(x,y,z)$ à D, notée $d(M,D)$.

3. On définit
$$\Sigma = \{M(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad d(M,D)^2 + d(M,P)^2 = 5\}$$

   Déterminer une équation cartésienne de Σ.

   Représenter simultanément Σ, D et P à l'écran.

   Que peut-on conjecturer quant à la nature de Σ ?

4. Réduire l'équation cartésienne obtenue pour Σ dans un repère orthonormal approprié et en déduire sa nature.

5. Calculer le volume du domaine intérieur à Σ.