

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On rappelle que M est dite nilpotente s'il existe un entier naturel p strictement positif tel que $M^p = 0$. On appelle indice de nilpotence d'une telle matrice le plus petit entier vérifiant cette égalité ; on note r cet entier.

1. Dans cette question, M est supposée nilpotente.

a. Que peut-on dire des valeurs propres de M ?

b. Si M est triangulaire supérieure, montrer que l'on a $1 \leq r \leq n$. Et dans le cas général ?

c. Écrire une procédure, en langage Maple ou Mathematica, qui prend en entrée une matrice M , carrée de dimension n quelconque, et renvoie son indice de nilpotence ou -1 si elle ne l'est pas. Tester la procédure avec la matrice I_6 puis avec la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 1 & 1 \\ -17 & -6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

d. À quelle condition une matrice nilpotente est-elle diagonalisable ?

2. Considérons les matrices

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -15625 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 18750 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -9375 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2500 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -375 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 30 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = M - 5I_6$$

a. Déterminer le polynôme caractéristique de M , ainsi que ses valeurs propres.

b. Que donne la procédure écrite à la question 1.c, appliquée à N ? Calculer, si besoin est, N^5 et N^6 et déterminer l'indice de nilpotence r de N .

c. Déterminer un vecteur v de \mathbb{R}^5 tel que $N^{r-1}v \neq 0$ et montrer que la famille $(v, Nv, \dots, N^{r-1}v)$ est une famille libre de \mathbb{R}^5 .

En déduire que N est semblable à la matrice

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

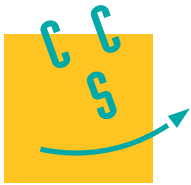
où pour tout i , $\varepsilon_i \in \{0,1\}$ est à déterminer.

On précisera les matrices P et P^{-1} telles que $N = PJP^{-1}$.

3. Soit P_n le polynôme de degré n défini par

$$P_n = 1 + X + \frac{X^2}{2!} + \cdots + \frac{X^n}{n!}$$

- a. Calculer $P_5(J)$ puis $(P_5(J))^{-1}$. Déterminer un polynôme Q_5 tel que $(P_5(J))^{-1} = Q_5(J)$.
- b. Soit $N_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente. Montrer qu'il existe un polynôme Q_n (à calculer explicitement) tel que $(P_n(N_n))^{-1} = Q_n(N_n)$.



1. Montrer que pour tout entier naturel n , il existe un unique polynôme P_n tel que

$$\forall z \in \mathbb{C}^* \quad P_n(z + z^{-1}) = z^n + z^{-n}$$

On recherchera une relation de récurrence vérifiée par cette famille de polynômes ; on pourra pour cela calculer le produit

$$(z^n + z^{-n})(z + z^{-1})$$

pour $z \in \mathbb{C}^*$.

2. Calculer les valeurs de P_n pour $0 \leq n \leq 6$.

Que peut-on conjecturer quant au degré, aux coefficients, au coefficient dominant, à la parité de P_n ?

Démontrer rapidement ces propriétés.

3. Représenter les polynômes P_n , pour $0 \leq n \leq 6$, sur le même graphe.

4. On note $E = \mathbb{R}_6[X]$ le \mathbb{R} -espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 6 et on pose :

$$\forall (P, Q) \in E^2 \quad \langle P, Q \rangle = \int_{-2}^2 \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{4-t^2}} dt$$

- a. Vérifier la convergence de l'intégrale et prouver que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E .

- b. Calculer $\langle P_i, P_j \rangle$ pour tout $(i, j) \in \{0, \dots, 6\}^2$.

Que peut-on en déduire ?

- c. Soit $(Q_n)_{0 \leq n \leq 6}$ la base orthonormale de E construite à partir de la base canonique par le procédé de GRAM-SCHMIDT.

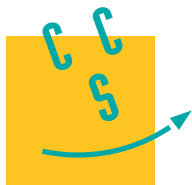
Expliciter Q_n pour $0 \leq n \leq 6$.

Que remarque-t-on ?

- d. Démontrer directement le résultat de la question précédente.

5. Déterminer les racines de P_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Vérifier le résultat obtenu pour $0 \leq n \leq 6$.



L'espace \mathbb{R}^2 est muni de sa structure affine canonique.

Soit le triangle ABC avec B et C des points sur l'axe des abscisses. Pour M un point de l'axe des abscisses, on note

- P_M le projeté orthogonal de M sur (AC) ;
- Q_M le projeté orthogonal de P_M sur (AB) ;
- R_M le projeté orthogonal de Q_M sur (BC) .

On considère l'application $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui à l'abscisse de M associe l'abscisse de R_M .

On cherche à résoudre $\varphi(x) = x$ avec $x \in \mathbb{R}$.

1. Étant donné trois points I, J et M avec $I \neq J$, déterminer le système vérifié par les coordonnées du projeté de M sur la droite (IJ) .
2. Écrire une procédure `proj` qui, pour les points I, J et M donnés avec $I \neq J$, retourne le projeté orthogonal de M sur la droite (IJ) .
3. En utilisant la procédure `proj`, écrire une procédure qui, pour un réel x donné, retourne l'abscisse du point R_M avec $M(x,0)$.

On choisit les points $B(0,0)$, $C(3,0)$ et $A(1,2)$. Pour x réel, on définit la suite de points $M_n(x_n,0)$ du plan par

$$x_0 = x \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = \varphi(x_n)$$

4. Étant donné un réel x et un entier N , programmer la représentation graphique des $N + 1$ premiers termes de la suite (x_n) . Tester pour $x = 2,9$ et $N = 100$. Qu'observe-t-on ?
5. Pour M et M' des points distincts de (BC) avec $M \neq C$, justifier l'égalité

$$\frac{P_M P_{M'}}{M M'} = \frac{P_M C}{M C} = |\cos c|$$

où c est la mesure de l'angle \widehat{BCA} .

6. En déduire qu'il existe $k \in]0,1[$ tel que

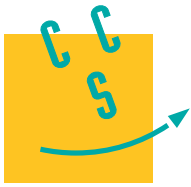
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq k|x - y|$$

7. En admettant la convergence de la suite (x_n) , déterminer une solution approchée de l'équation $\varphi(x) = x$.
8. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $u_n = x_{n+1} - x_n$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq k^n |u_1 - u_0|$$

En déduire la convergence de $\sum u_n$.

9. Conclure.



On considère la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par

$$\begin{cases} f(0,0) = 0 \\ f(x,y) = \frac{x^3y}{x^4 + y^2} + xy - 2y \end{cases}$$

1. Représenter la surface de \mathbb{R}^3 définie par $f(x,y) = z$.

Que peut-on dire de f en $(0,0)$?

Montrer ce résultat.

2.

a. Calculer la dérivée de f suivant le vecteur \vec{n} de coordonnées (a,b) au point $c = (1,1)$.

b. Comment choisir \vec{n} unitaire pour que cette dérivée soit maximale ?

3. Étude des extremums de f

a. Donner les coordonnées des points critiques de f .

b. Soit (x_0, y_0) un point critique.

On considère un développement limité à l'ordre 2 de la fonction $r \mapsto f(x_0 + ra, y_0 + rb)$ où (a,b) est un vecteur unitaire. On note $q(a,b)$ le coefficient de r^2 .

En étudiant la quadrique d'équation $q(a,b) = 0$ déterminer la nature des points critiques de f .

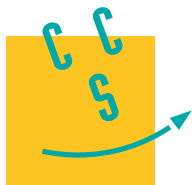
c. Y a-t-il des extremums globaux ?

4.

a. Donner les dérivées partielles premières en $(0,0)$.

b. Représenter les surfaces définies par $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = z$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = z$.

c. Que peut-on conjecturer de ces représentations ? Expliquer ce résultat.



1. On pose pour tout réel x

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp(in^2 x)}{2^n}$$

- Vérifier que $f(x)$ existe pour tout x .
- Justifier la continuité de f .
- Tracer à l'écran la courbe donnée par la paramétrisation

$$x \mapsto M(x)$$

où $M(x)$ est le point du plan complexe d'affixe $f(x)$.

On pourra utiliser l'instruction `complexplot` de la bibliothèque `plots` et se contenter d'une somme finie raisonnable de termes.

- Montrer que f est de classe C^∞ sur \mathbb{R} et exprimer, pour tout entier naturel p et tout x , $f^{(p)}(x)$ comme somme d'une série.
- On pose, pour tout entier naturel p ,

$$a_p = \frac{f^{(p)}(0)}{p!}$$

et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G_p(x) = \left| \sum_{k=0}^p a_k x^k \right|$$

- Donner la valeur exacte de a_0, a_1, \dots, a_9 .
- Pour tout $p \in \{1, \dots, 5\}$, tracer simultanément à l'écran les courbes représentatives des fonctions G_p sur des intervalles réels centrés en 0.
- On s'intéresse à la série entière

$$\sum a_p x^p$$

Montrer que pour tout x réel non nul, la suite $a_p x^p$ diverge.

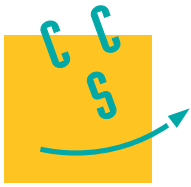
En déduire le rayon de convergence de cette série entière.

- Déterminer les coefficients de Fourier exponentiels de f .
 - Quels théorèmes peut-on appliquer à sa série de Fourier ?
 - On note pour tout entier naturel n , S_n la somme partielle de rang n de sa série de Fourier.

Tracer successivement à l'écran, pour les premières valeurs de n , les courbes données par les paramétrisations

$$x \mapsto N_n(x)$$

où $N_n(x)$ est le point du plan complexe d'affixe $S_n(x)$.



1. Soit $(t, x) \mapsto h(t, x)$ une application de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 à valeurs réelles. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$H(x) = \int_0^x h(t, x) dt$$

En utilisant le logiciel informatique exprimer la dérivée $H'(x)$ à l'aide de l'application h .

On admettra provisoirement que $H'(x)$ existe pour tout x réel ainsi que la formule trouvée.

2. On veut déterminer l'ensemble des fonctions f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} et de classe C^1 qui vérifient le système d'équations suivant :

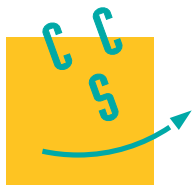
$$(S) \begin{cases} f(0) = 1 \\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) + 8 \int_0^x \cos(x-t)f(t)dt = 9 \end{cases}$$

- a. Montrer qu'une application f de classe C^1 et qui vérifie le système d'équations (S) est forcément de classe C^∞ .
- b. Montrer qu'il existe des fonctions f_1, f_2, f_3 à déterminer explicitement et des constantes A, B, F telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait nécessairement

$$f(x) = Af_1(x) + Bf_2(x) + f_3(x) + F$$

- c. Déterminer toutes les solutions du problème considéré.

3. Démontrer le résultat trouvé à la première question.



On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -23 & 10 & 3 & -11 \\ 314 & -126 & -39 & 139 \\ -426 & 174 & 56 & -187 \\ 225 & -92 & -29 & 100 \end{pmatrix}$$

et u l'endomorphisme canoniquement associé de \mathbb{R}^4 .

Avant toute chose, afin de corriger une éventuelle faute de frappe, vérifier que $u(1, 2, 3, 4) = (-38, 501, -658, 354)$.

- Déterminer le polynôme caractéristique P de u , ainsi que ses valeurs propres et espaces propres. Que dire de sa diagonalisabilité ?
- On pose $v_1 = (-8, 103, -139, 73)$, $v_2 = u(v_1)$ et $v_3 = u(v_2)$.
 - Montrer que (v_1, v_2, v_3) est liée et déterminer une relation de dépendance linéaire entre ces vecteurs.
 - On pose $F = \text{Vect}(v_1, v_2)$. Montrer que F est un plan stable par u dont $B = (v_1, v_2)$ est une base.
 - Déterminer la matrice C dans la base B de l'endomorphisme u_F induit par u sur F .
 - Déterminer le polynôme caractéristique P_F de u_F , ainsi que ses valeurs propres et espaces propres. Que dire de sa diagonalisabilité ?
 - Comparer P_F et P .
- On pose $w_1 = (2, -13, 17, -9)$, $w_2 = u(w_1)$, $w_3 = u(w_2)$ et $w_4 = u(w_3)$.
 - Montrer que (w_1, w_2, w_3, w_4) est liée et déterminer une relation de dépendance linéaire entre ces vecteurs.
 - On pose $G = \text{Vect}(w_1, w_2, w_3)$. Montrer que G est stable par u et que $B' = (w_1, w_2, w_3)$ en est une base.
 - Déterminer la matrice C' dans la base B' de l'endomorphisme u_G induit par u sur G .
 - Déterminer le polynôme caractéristique P_G de u_G , ainsi que ses valeurs propres et espaces propres. Que dire de sa diagonalisabilité ?
 - Comparer P_G et P .
- Peut-on trouver un plan de \mathbb{R}^4 stable par u sur lequel le polynôme caractéristique de l'endomorphisme induit est $(X - 2)^2$?



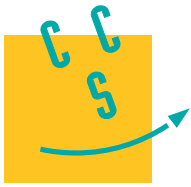
L'espace $E = \mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne canonique.

- Déterminer les matrices dans la base canonique de
 - la rotation d'axe orienté par $\vec{i} + \vec{k}$ d'angle $\pi/4$;
 - la réflexion par rapport au plan $F : x + 2y + z = 0$.
- Déterminer des réels α, a, b, c et d tels que $A = \alpha \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & a & c \\ -1 & b & d \end{pmatrix}$ soit une matrice de rotation.

En préciser les éléments caractéristiques.

- Soit r une rotation d'axe orienté $\text{Vect}(a)$ avec $\|a\| = 1$ et d'angle θ et soit $x \in E$. On note (u, v) l'unique couple de $\text{Vect}(a) \times \text{Vect}(a)^\perp$ tel que $x = u + v$.
 - Préciser (u, v) en fonction de x puis déterminer $r(u)$.
 - Déterminer une expression simple de $r(v)$ en fonction de v et $a \wedge v$.

(On pourra remarquer que $(a, v, a \wedge v)$ est une famille orthogonale.)
 - En déduire que $r(x) = (1 - \cos \theta)\langle x, a \rangle a + \cos \theta x + \sin \theta(a \wedge x)$.
- En utilisant le résultat précédent, retrouver la matrice de la rotation d'axe $\vec{i} + \vec{k}$ d'angle $\pi/4$.
- Soit le système différentiel $X' = AX$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
 - Montrer qu'il existe une application $t \mapsto B(t)$ à valeurs dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ que l'on déterminera telle que $\forall t \in \mathbb{R}, X(t) = B(t)X(0)$.
 - Décrire l'endomorphisme canoniquement associé à $B(t)$ pour t réel fixé.



On pose pour tout $x \in [0, 1[$, $f(x) = \sqrt{1-x} \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n^2}$ et pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $f_N(x) = \sqrt{1-x} \sum_{n=1}^N x^{n^2}$.

1. Vérifier que f est correctement définie.
2. Représenter simultanément les fonctions f_N pour $N \in \{1, 2, \dots, 10\}$.

Quelle conjecture peut-on en déduire ?

3. Calculer les valeurs approchées des maximums des fonctions f_N pour $N \in \{2, 4, \dots, 40\}$.

On justifiera la monotonie de cette suite.

4. On note $\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Donner la valeur de $A_N = \sum_{n=0}^N a_n$.

5. Soit g une fonction développable en série entière de rayon égal à 1.

On note $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ et on suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n \geq 0$. On note $C_N = \sum_{n=1}^N c_n$.

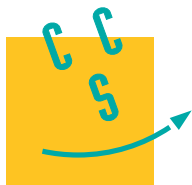
Montrer que, pour tout $x \in]-1, 1[$, $g(x) = (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} C_n x^n$.

On note $\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$. Quelle est la valeur de $B_N = \sum_{n=0}^N b_n$?

6. Calculer la limite $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{A_N}{B_N}$.

La comparer aux valeurs trouvées à la **question 3**.

7. Montrer la conjecture de la **question 2**.



Dans cet exercice, on se place dans l'espace affine euclidien \mathbb{R}^3 rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. Soit P le plan d'équation $x + y - 2z - 1 = 0$. Déterminer la distance d'un point $M(x, y, z)$ à P , notée $d(M, P)$.

2. Soit D la droite passant par le point $A(1, 1, 0)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Représenter simultanément à l'écran la droite D et le plan P . Sont-ils parallèles ?

Calculer la distance d'un point $M(x, y, z)$ à D , notée $d(M, D)$.

3. On définit

$$\Sigma = \{M(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad d(M, D)^2 + d(M, P)^2 = 5\}$$

Déterminer une équation cartésienne de Σ .

Représenter simultanément Σ , D et P à l'écran.

Que peut-on conjecturer quant à la nature de Σ ?

4. Réduire l'équation cartésienne obtenue pour Σ dans un repère orthonormal approprié et en déduire sa nature.

5. Calculer le volume du domaine intérieur à Σ .