1. I) Soit $P_n = (X+1)^n - (X-1)^n$. Factoriser P_n sur $\mathbb{C}$.
   En déduire $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$ puis $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$.
   II) Soit u un endomorphisme symétrique de E.
   (a) Montrer que $f: \begin{array}{ccc} E\setminus\{0\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{\langle u(x), x\rangle}{\|x\|^2} \end{array}$ est bornée et atteint ses bornes. Exprimer ses bornes en fonction du spectre de u.
   (b) Montrer que $f: \begin{array}{ccc} E\setminus\{0\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{\langle a, x\rangle\langle b, x\rangle}{\|x\|^2} \end{array}$ est bornée et atteint ses bornes.
   (c) Calculer les bornes de $(x,y) \mapsto \dfrac{x^2+2xy+y^2}{x^2-xy+y^2}$.
   (Berr-Centrale) O17-961
2. I) Trouver les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ tels que $P(X^2) = (X+1)P(X)$.
   II) Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, n réels strictement positifs de somme égale à 1 et $x_1, \ldots, x_n$, n réels strictement positifs.
   Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \geq \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i}$.
   Soit A symétrique, réelle, de valeurs propres strictement positives ; montrer que $\det A \leq \displaystyle\prod_{i=1}^{n} a_{ii}$.
   Soit E un espace vectoriel de dimension finie, f un endomorphisme symétrique de valeurs propres strictement positives.
   Montrer que si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormale de E, alors $\det f \leq \displaystyle\prod_{i=1}^{n} < f(e_i), e_i >$. Peut-on avoir l'égalité ?
   Montrer que si f et g sont deux endomorphismes symétriques, de valeurs propres strictement positives, $\det f + \det g \leq \det(f+g)$. (Centrale) O17-072
3. I) Montrer que, si A et B sont deux matrices réelles, carrées d'ordre n et qui commutent, $\det(A^2+B^2) \geq 0$.
   Montrer, plus généralement, que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\det(A^{2k} + B^{2k}) \geq 0$.
   On suppose $\det(A+B) \geq 0$; montrer que $\det(A^3+B^3) \geq 0$, puis que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\det(A^{2k+1} + B^{2k+1}) \geq 0$.
   II) Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n et u un endomorphisme de E ; on note T l'endomorphisme défini sur $\mathcal{L}(E)$ par $T(v) = u \circ v - v \circ u$.
   Soit D une matrice diagonale ; calculer DE_{ij} et $E_{ij}D$ en fonction de E_{ij} et en déduire que si u est diagonalisable si T l'est aussi.
   La réciproque est-elle vraie ? (Centrale) O17-076
4. I) Montrer que $(P|Q) = \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} P(k)Q(k)$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.
   Montrer que $H_n = \{P \in \mathbb{R}_n[X], \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)ţ = 0\}$ est un hyperplan de $\mathbb{R}_n[X]$ dont on donnera une équation dans la base canonique.
   Trouver $A_1 \in \mathbb{R}_1[X]$ tel que H_1 soit le noyau de ϕ définie par $\phi(P) = (A_1|P)$, puis calculer la distance de X^2 à H_1.
   II) Soient A et B carrées d'ordre n et qui commutent ; on pose $N = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & A \end{pmatrix}$. Calculer N^k.
   Pour $P \in \mathbb{C}_n[X]$, calculer $P(N)$ en fonction de $P(A)$ et $P'(A)$.
   Montrer que si $P \in \mathbb{C}[X]$, non constant, n'ayant que des racines simples, annule N, alors $P'(A)$ est inversible.
   Montrer que N est diagonalisable si et seulement si A est diagnalisable et $B = 0$. (Centrale) O17-077