1. Justifier l'existence et l'unicité de x et y, solutions du système différentiel $\begin{cases} x'(t) = \dfrac{2x^2(t)+3x(t)+1}{y(t)} \\ y'(t) = -2x(t) - 2 \\ x(1) = -\dfrac{2}{3},\ y(1) = -\dfrac{3}{2} \end{cases}$.

   Tracer le champ de vecteurs (on pourra utiliser Maple et la bibliothèque Detools, ainsi que Deplot) ; peut-on en déduire la courbe intégrale ?

   On pose $f(t) = x(t)y(t)$; calculer $f'(t)$ et en déduire f, puis montrer que y vérifie $(E) : y'(t) = -\dfrac{1}{2y(t)} - 1$.

   Trouver x et y à l'aide de Maple et tracer la courbe.

   Montrer que y est développable en série entière, $y = \displaystyle\sum_{0}^{+\infty} a_n x^n$.

   Trouver a_i, $0 \le i \le 10$.

   ? ? ? Soit $b_n = \dfrac{n+1}{2n-4} \displaystyle\sum_{k=1}^{n-2} a_{k+j} a_{n-k}$; calculer b_i, pour $3 \le i \le 10$. Conjecture ? La prouver en utilisant (E). ? ? ? (Centrale-PC) O17-073

2. Avec Maple : soit k un entier au moins égal à 2 ; on note $A(k,p)$ les points d'affixe $z_{k,p} = \mathrm{e}^{2ip\pi/k}$, $f(p,k,t) = (1-t)z_{k,p} + tz_{k,p+1}$ et $g(k,t) = f\big(\big(E(kt), k, kt - E(kt)\big)$ où E est la fonction partie entière.

   Définir les trois fonctions sur le logiciel de calcul formel.

   Quelle est la nature de la courbe paramétrée par f pour $t \in [0,1]$?

   Donner la nature des courbes représentées par g pour $0 \le k \le p-1$ et les représenter pour $3 \le k \le 6$ (on pourra utiliser la commande « complexplot » de l'ensemble « plots »).

   Vérifier que $t \mapsto h(k,t) = g(k, \dfrac{t}{2\pi})$ est 2π-périodique ; quels théorèmes peut-on utiliser pour étudier sa série de Fourier ?

   Ecrire une fonction c qui, au couple (k,n), associe le coefficient de Fourier c_n de la fonction h.

   Ecrire une fonction S qui, au triplet (k,n,t), associe la valeur t de la suite des sommes partielles de la série de Fourier, à l'ordre n.

   Tracer sur un même graphique $h(3,t)$, $S(3,1,t)$, $S(3,3,t)$ et $S(3,5,t)$ et conclure. (Centrale-PC) O17-075

3. Avec Maple : montrer que $\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca \ge 0$. Quand y a-t-il égalité ?

   $A = \begin{pmatrix} a & c & b \\ c & b & a \\ b & a & c \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

   Tracer la quadrique d'équation :

   $a(x^2 + 2yz) + b(y^2 + 2xz) + c(z^2 + 2xy) = 1$ pour $(a,b,c) = (1, 2, -\dfrac{2}{3})$ et $(a,b,c) = (-1, -2, \dfrac{2}{3})$.

   Déterminer la nature de la quadrique si $a = b = c$ puis si a, b et c ne sont pas tous égaux.

   Proposer une condition nécessaire et suffisante sur (a,b,c) pour que la quadrique soit une surface de révolution non vide et non dégénérée.

   En supposant cette condition réalisée, déterminer les valeurs de (a,b,c) pour lesquelles la surface peut être considérée comme la rotation d'une droite D autour d'un axe Δ.

   Déterminer D et Δ et vérifier les résultats en les traçant, ainsi que la surface, sur un même graphe. (Centrale-PC) O17-078

4. Ensemble de définition de $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t$.

   Montrer que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur cet ensemble.

   Tracer f avec le logiciel ; que peut-on dire ?

   Etablir une conjecture quant à la limite de f en $+\infty$.

   Montrer que $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{x^2+n^2}$ et en déduire la limite de f en $+\infty$ à l'aide d'une comparaison série-intégrale.

   A l'aide du logiciel, calculer les coefficients de Fourier exponentiels de g, 2π-périodique, définie par $g(x) = \mathrm{ch}(tx)$ sur $[-\pi, \pi]$ et retrouver la somme obtenue pour f. (Centrale-PC) O17-085

5. Avec Maple, tracer la nappe T : $\begin{cases} x = (3 + 2\cos u)\cos t \\ y = (3 + 2\cos u)\sin t \\ z = 2\sin u \end{cases}$.

Que peut-on en dire ? Calculer l'aire définie par T.
Donner l'équation cartésienne de T (on pourra commencer par chercher l'intersection de T avec le plan $x = 0$).
Montrer que l'intersection de T et du plan $z = 0$ est constituée de deux cercles.
En déduire un nouveau paramétrage de T et le tracer avec Maple.
Déterminer l'équation du plan (P) passant par O et tangent à T en $M(0, b, c)$ avec $b > 0$ et $c > 0$.
Déterminer (b, c) pour que ce plan (P) passe aussi par le point $(0, -b, -c)$.
Pour cette valeur de (b, c), étudier l'intersection de T avec le plan (P).
(Centrale-PC) O17-088

6. Domaine de définition de $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{1 + x^{2n}}$.
   Montrer que f est continue sur $]-1, 1[$.
   Donner, en la justifiant, une relation simple entre $f(x)$ et $f(\frac{1}{x})$ lorsqu'ils sont définis ; en déduire que f est continue sur son domaine de définition. Représenter f sur l'ordinateur ; commenter.
   En comparant f à une intégrale, montrer que, pour $x \in]0, 1[$, $-\frac{\pi}{4 \ln x} \leq f(x) \leq 1 - \frac{\pi}{4 \ln x}$.
   En déduire un équivalent de f en 1^-.
   En utilisant la même méthode, trouver un équivalent de f en 1^+.
   Après l'avoir justifiée, déduire de l'égalité, pour $x \in]-1, 0[$, $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{1 + x^{4k}} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|x|^{2k+1}}{1 + x^{4k+2}}$, qu'il est possible de prolonger f en -1.
   (Centrale-PC) O17-089

7. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.
   (a) Avec Maple, calculer α_n pour n allant de 1 à 10.
   (b) Avec Maple, calculer $\alpha_{n+1} - (n + 1)\alpha_n$. Que peut-on conjecturer. Le prouver.
   (c) Comment caractériser α_n. Le prouver.
   (d) i. Sur $] - 1, 1[$, on étudie $(1 - x)y' - xy = 0$. Expliciter la solution f qui vérifie la condition initiale $f(0) = 1$.
       ii. Calculer la valeur en 0 de la dérivée $n-$ième de f pour n allant de 1 à 10. Que peut-on conjecturer ?
       iii. Le prouver. On pourra utiliser le théorème de Leibniz.
       iv. On pose $\alpha_0 = 1$. Montrer que $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha_k = n!$.
   (Berg-Centrale) O17-960

8. Soit C l'espace vectoriel des fonctions continues et $2\pi-$périodiques.
   Pour $f \in C$, soit $A(n, f) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(k) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\ \mathrm{d}t$.
   (a) i. Ecrire avec Maple une fonction A qui pour n et f donnés renvoie $A(n, f)$.
       ii. Calculer $A(n, x \mapsto \sin(3x))$.
       iii. Calculer $A(n, x \mapsto \exp(ipx))$ où $p \in \mathbb{Z}$.
       iv. Calculer la limite quand n tend vers $+\infty$ de $A(n, x \mapsto \exp(ipx))$ où $p \in \mathbb{Z}$.
   (b) Soit g une fonction de C.
       i. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer qu'il existe un polynôme trigonométrique P tel que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad |g(x) - P(x)| < \varepsilon$.
       ii. Montrer que $|A(n, g) - A(n, P)| < 2\varepsilon$.
       iii. Montrer que $\lim_{n \to +\infty} A(n, P) = 0$.
       iv. En déduire que $\lim_{n \to +\infty} A(n, g) = 0$.
   (c) (?)

(Berr-Centrale) O17-962

9. Soit l'équation différentielle $(E)\quad 9(1-x^2)y" - 9xy' + y = 0$.
   (a) Sur quels intervalles l'ensemble des solutions est-il de dimension 2 ?
   (b) i. Avec Maple, résoudre (E) sur $]-1,1[$.
   ii. Trouver une solution g continue sur $[-1,1]$ telle que $g(0) = 1/2$ et telle que g soit $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1]$.
   iii. Est-elle $\mathcal{C}^1$ sur $[-1,1]$?
   iv. Vérifier qu'elle est $\mathcal{C}^2$ sur $]-1,1]$.
   (c) A l'aide de (E), trouver un développement en série entière de $x \mapsto \sin\left(\dfrac{1}{3}\arcsin x + \dfrac{\pi}{6}\right)$.

(Keis-Centrale) O17-963

10. Donner les ensembles de définition de $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)(3n+1)}$, de $g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1}$ et de $h(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{3n+1}$.
    Tracer f sur Maple.
    Calculer la dérivée de $xg(x)$ et en déduire g sous une autre forme.
    Calculer la dérivée de $xh(x^3)$ et en déduire h sous une autre forme.
    Trouver a et b tels que $\dfrac{1}{(n+1)(3n+1)} = \dfrac{a}{n+1} + \dfrac{b}{3n+1}$.
    Questions visant à écrire f sous une autre forme
    (Centrale-PC) O17-C018

11. Avec Maple : pour $x \in \mathbb{R}$, $y > 0$, on pose $P(x,y) = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{y}{x^2+y^2}$.
    Montrer que $\Delta P(x,y) = 0$, où $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$.
    Tracer $P(x,y)$ pour $y \in \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\}$.
    Trouver une primitive de $u \mapsto P(x-u,y)$.
    En déduire que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} P(x-u,y)\,\mathrm{d}u$ est constante et la calculer.
    Soit F continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$; montrer que $G(x) = Q(x,y) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{\mathbb{R}} P(x-u,y)F(u)\,\mathrm{d}u$ est $\mathcal{C}^2$ ainsi que $H(y) = Q(x,y) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{\mathbb{R}} P(x-u,y)F(u)\,\mathrm{d}u$; montrer que $\Delta Q = 0$ puis que $\displaystyle\lim_{y\to 0^+} Q(x,y) = F(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ fixé.
    (Centrale-PC) O17-C022

12. Soient les équations différentielles $(E)\ :\ y'' + \mathrm{e}^{ix}y' + y = \mathrm{e}^{-ix}$ et $(E_0)\ :\ y'' + \mathrm{e}^{ix}y' + y = 0$.
    Soit y une solution définie sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique de l'une ou l'autre des équations. Montrer que y est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
    Justifier l'existence de coefficients c_n, $n \in \mathbb{Z}$, tels que :
    $y(x) = c_0 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}[c_n\mathrm{e}^{inx} + c_{-n}\mathrm{e}^{inx}]$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
    Justifier que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^k c_n = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
    Soit y une solution définie sur $\mathbb{R}$ et 2π périodique de (E_0).
    Trouver une relation entre c_n et c_{n-1}.
    Exprimer c_n en fonction de c_0 et de c_1.
    Exprimer y_1 correspondant à $(c_0,c_1) = (0,1)$ et y_2 correspondant à $(c_0,c_1) = (1,0)$. Vérifier les réponses avec le logiciel de calcul.
    Résoudre (E) par la méthode de variation des constantes à l'aide de y_1 et de y_2. Vérifier la réponse avec le logiciel de calcul.
    (Centrale-PC) O17-C029

13. $f(x,y,z) = 22x^2 + 22y^2 + 19z^2 + 8xy - 4xz - 4yz - 148x - 4y + 236z - 1252$.
    Soit S la surface de $\mathbb{R}^3$ d'équation $f(x,y,z) = 0$ dans un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
    Montrer que f admet un unique point critique Ω.

Exprimer l'équation de S dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Que remarque-t-on ? Donner les symétries de S.
Quelle est la nature de S ? Donner un paramétrage de S et la tracer.
Calculer l'aire de S.
(Centrale-PC) O17-C031

14. Montrer que $f_1(t) = \dfrac{\ln t}{(t+1)(t+2)}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
Calculer avec Maple $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_1(t)\ \mathrm{d}t$.
Effectuer le changement de variable $t = \phi(u) = \dfrac{2}{u}$ avec Maple et recalculer l'intégrale.
On pose $f_2(t) = \dfrac{\ln t}{(t+1)(t+2)(t+3)}$; calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_2(t)\ \mathrm{d}t$.
Soient $a > 0$ et $f_3(t) = \dfrac{\ln t}{(t+a)^2}$; calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_3(t)\ \mathrm{d}t$.
Pour $b > 0$, ab on pose $f_4(t) = \dfrac{\ln t}{(t+a)(t+b)}$; calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_4(t)\ \mathrm{d}t$.
Soient $a = (a_i)_{i \geq 2}$, $a_i > 0$ tels que si $i \neq j$, $a_i \neq a_j$.
Soit $I_n(a) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{\prod_{i=1}^{n}(t+a_i)}\ \mathrm{d}t$.
Dans le cas où $a_i = i$, calculer $I_n(a)$ avec Maple, pour $2 \leq n \leq 10$.
Dans le cas général, avec un changement de variable judicieux, calculer $I_2(a)$.
Trouver α et β tels que $\dfrac{1}{(t+a_{n+1})(t+a_n)} = \dfrac{\alpha}{t+a_n} + \dfrac{\beta}{t+a_{n+1}}$.
Trouver une relation de récurrence entre $I_{n+1}(a)$, $I_n(a)$ et $I_n(a')$, avec $a'_i = a_i$ si $i \neq n$ et $a'_n = a_{n+1}$.
Calculer $I_3(a)$. Calculer $I_n(a)$, pour $2 \leq n \leq 10$ et $a_i = i$.
(Centrale-PC) O17-C035

15. Tracer des sommes partielles de la série de fonctions de terme général $u[n](x) = \dfrac{\cos(nx)}{\ln n}$ pour $n > 1$ (prendre au moins 50 termes).
Conjecturer sur la convergence de la série et sa limite (continuité ? dérivabilité ?).
Existe-t-il une fonction continue par morceaux, 2π-périodique, telle que sa série de Fourier ait pour terme général $u[n](x)$? (On pourra utiliser la formule de Parseval).
Montrer que $S[N](x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \cos(kx)$ est bornée sous certaines conditions sur x. Donner une majoration simple.
On pose $U[N](x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{N} u[n](x)$.
Vérifier que $U[N](x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{N} \frac{S[n](x)}{\ln n} - \sum_{n=2}^{N} \frac{S[n-1](x)}{\ln n}$
Montrer qu'il existe $(w[n](x))$ tel que $U[N](x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} w[n](x)$ où $\sum w[n](x)$ converge normalement sur $[\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}]$.
Examiner les cas $x = 2p\pi$ et $x = p\pi$ avec p entier.
(Centrale-PC) O17-C037